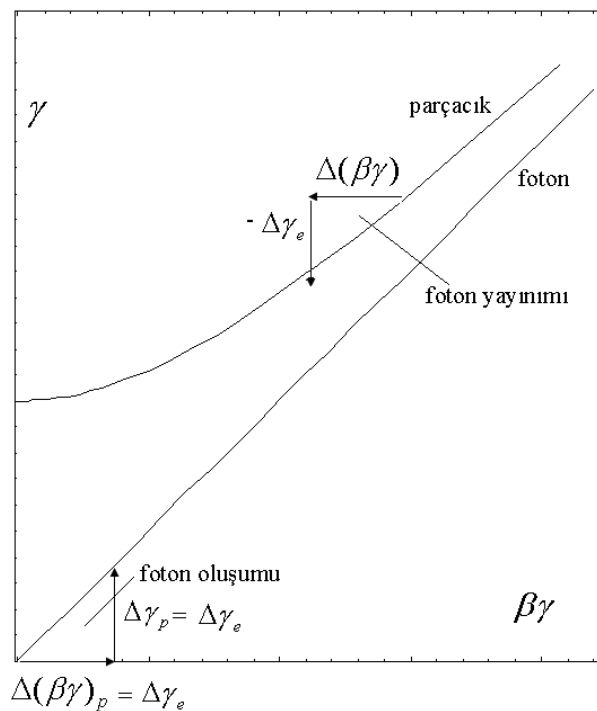


11. HIZLANDIRICIYA DAYALI IŞINIM KAYNAKLARI: SİNKROTRON IŞINIMI

Bu bölümde parçacık hızlandırıcılarına dayalı olarak elde edilen ışınım kaynakları tanımlanarak, bu ışınımın temel karakteristikleri ve temel parametreleri ele alınacaktır. Hızlandırıcıya dayalı ışınımın sinkrotron ışınımı, serbest elektron lazeri ve frenleme (Bremsstrahlung) ışınımı olarak anılırlar. Yüklü parçacıkların ışınım yapmasını anlamada elektronun foton soğurması veya yayması için gerekli koşulları anlamak önemlidir. Bu anlamda enerji ve momentum korunumu yasaları ve elektromanyetik dalgalar için enerji akışını ifade eden Poynting vektörü önemli niceliklerdir.

11.1. Korunum Yasaları ve Işınım

Elektromanyetik ışınım yayılması olayı elektron ve ışınım alanı olmak üzere iki bileşen içerir. Böyle bir sistem için enerji-momentum korunumu sağlanmalıdır. Bu korunum yasaları mümkün olan yayılım süreçleri üzerine çok özel seçim kuralları koyarlar ve bu kurallar elektron ve fotonun enerji-momentum grafiği yardımıyla ele alınabilir.

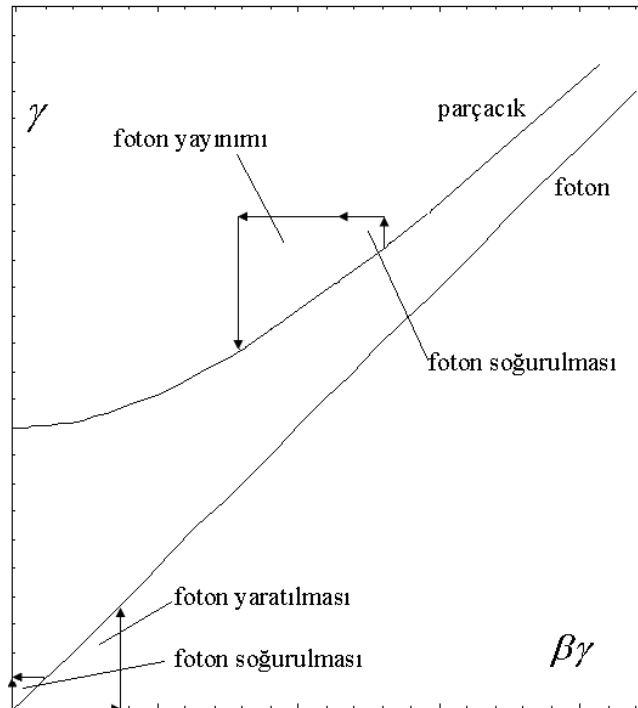


Şekil 11.1. Mükemmel vakum ortamında hareket eden elektronun ışınım yayımladığı ve soğurduğu durumlarda enerji-momentum korunumunun davranışı

Bir parçacığın momentumu ve enerjisi korunum yasaları gereği grafikte görülen parçacık-çizgisi üzerinde olmalıdır. Parçacık ve foton arasındaki enerji alışverişi korunum kurallarına uymalıdır. Şekil 11.2' de vakum ortamında Compton saçılma sürecinde enerji-momentum korunumu verilmektedir. Bir foton oluşturmak için elektronun kaybetmesi gereken momentum, fotonun kazanması gereken enerjiye eşit olacaktır. Açıkça bu durumda elektron parçacık çizgisinin dışında bir noktada bulunacak ve momentum korunumunu ihlal edecektir. Bu süreç izinli değildir, yani, vakum ortamında bir elektron enerji momentum korunumunu ihlal etmeden foton soğuramaz veya yayımlayamaz.

11.2. Compton Işınımı

Enerji-momentum korunumunu ihlal etmeden serbest elektronlardan elektromanyetik ışınım üretmek için, gelen bir fotonun elektrondan saçılmasını konu alan Compton olayını kullanabiliriz. Gelen fotonla kafa kafaya çarpışan elektron bu fotonu soğurarak farklı enerjiye sahip yeni bir foton yayımlar. Bu süreçte foton enerji kazanır ve momentum kaybeder. Elektron da enerji-momentum uzayında ortalama bir noktaya taşınır. Böylece elektron bir foton yayımlayarak son durumda parçacık çizgisine ulaşabilir. Bu süreç sinkrotron ışınımı üretilmesinde de yer almaktadır.



Şekil 11.2. Compton saçılması sürecinde enerji-momentum korunumu

11.3. Poynting Vektörü

Bir yüklü parçacık, elektromanyetik alan ortamında Lorentz kuvveti ve parçacığın hızı ile tanımlanır.

$$\vec{F}_L \vec{v} = (e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{B}])\vec{v} \quad (11.1)$$

Alan parçacık sisteminde enerji korunumu;

$$\frac{d}{dt} \int u dV + \int \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \int \vec{S} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (11.2)$$

şeklinde verilir.

Burada ilk terim alan enerjisindeki değişimi, ikinci terim parçacığın enerji kazancını ya da kaybını, üçüncü terim ise kapalı bir S yüzeyinden kaybedilen ışınımı göstermektedir. Poynting vektörü enerji akışını tanımlar ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (11.3)$$

Bu ifade elektromanyetik ışınımın karakteristiklerini yansıtmaktadır. Elektrik ve manyetik alan birbirlerine ve dalganın yayılma doğrultusuna diktir ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{n}$).

Düzlem dalgalar için,

$$\vec{n} \times \vec{E} = \vec{B} \quad (11.4)$$

ifadesi kullanılarak Poynting vektörü sadeleştirilebilir.

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 E^2 \vec{n} \quad (11.5)$$

Poynting vektörü, birim yüzey alanından n doğrultusunda ışınım enerjisi akışı olarak tanımlanır ve ışınımın elektrik alanının karesiyle değişmektedir.

11.4. Sinkrotron Işınımının Gücü

Işınım yapan yüklü parçacığı kapsayan yüzey üzerinden Poynting vektörünün integrasyonu ışınımın gücünü vermektedir. Burada $ndA = R \sin\theta d\theta d\varphi$ küresel koordinatlarda alan elemanı olarak alınır ve R yükün bulunduğu noktaya olan uzaklığı vermektedir.

$$P = \int \vec{S} d\vec{A} = \frac{2}{3} r_c \frac{mc^2}{c^3} \vec{a}^2 \quad (11.6)$$

Bu eşitlikte a , parçacığın ivmesidir. $a^2 = \gamma^6 \{a^2 - [\beta \times a]^2\}$ kullanılarak, laboratuvar sistemindeki güç;

$$P = \frac{2}{3} r_c mc \gamma^6 \left[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \quad (11.7)$$

şeklinde elde edilir.

β ve $\dot{\beta}$ niceliklerinden dolayı ışınımın gücü büyük ölçüde parçacık yörüngesinin geometrisine bağlıdır. İvmenin hareket yönüne dik ve paralel bileşenleri incelenerek, sinkrotron ışınımının gücüne paralel ve enine ivmelenmeden gelen katkılar elde edilebilir.

$$\dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{\beta}}_{\parallel} + \beta_{\perp} \quad (11.8)$$

$$P_{\parallel} = \frac{2}{3} r_c mc \gamma^6 \dot{\beta}_{\parallel}^2 \quad (11.9)$$

$$P_{\perp} = \frac{2}{3} r_c m c \gamma^4 \dot{\beta}_{\perp}^2 \quad (11.10)$$

Paralel ivmelenme hızlandırıcı kuvvet ile ilgilidir.

$$m \dot{v}_{\parallel} = \frac{1}{\gamma^3} \frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} \quad (11.11)$$

$$P_{\parallel} = \frac{2}{3} \frac{r_c}{m c} \left(\frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} \right)^2 \quad (11.12)$$

Enine ivmelenme ise Lorentz kuvveti ile ilişkilidir.

$$\frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} = \gamma m \dot{v}_{\perp} = e [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (11.13)$$

$$P_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{r_c}{m c} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} \right)^2 \quad (11.14)$$

Boyuna ivmelenmenin sebep olduğu ışınım, enine ivmelenmenin sebep olduğu ışınımın zamanla değişiminin karesi ile orantılıdır (Eşitlik 5.14). Pratik amaçlar göz önünde bulundurulduğunda, ışınım gücü elde etmek için boyuna ivmelendirme sağlanırken teknik sınırlamalarla karşılaşmaktadır. Işınım gücü olarak enine ivmelendirmenin sebep olduğu ışınım gücünden bahsedilir ve $P_{\perp} = P_{\gamma}$ olarak alınır. Eşitlikte geçen dik kuvvet yerine Lorentz Kuvveti konularak ışınım gücü pratik birimler cinsinden ifade edilebilir;

$$P_{\gamma} = \left[\frac{4\pi}{\mu_0} \right] \frac{2r_c^2 c}{3(mc^2)^2} B^2 E^2 = C_B B^2 E^2 \quad (11.15)$$

$$C_B = \left[\frac{4\pi}{\mu_0} \right] \frac{2r_c^2 c}{3(mc^2)^2} = 6.0779 \times 10^{-8} \frac{W}{T^2 GeV^2} = 379.35 \frac{1}{T^2 GeVs} \quad (11.16)$$

Sinkrotron ışınımının gücü, Eşitlik 11.15' te görüldüğü gibi, manyetik alanın karesi ve demet enerjisinin karesi ile değişmektedir. Manyetik alan için aşağıdaki ifade kullanılarak anlık sinkrotron ışınımı yeni bir formda elde edilir.

$$B = \frac{1 \beta E}{\rho e} \quad (11.17)$$

$$P_\gamma = \frac{2}{3} r_c m c^3 \frac{\beta^4 \gamma^4}{\rho^2} \quad (11.18)$$

Pratik birimler cinsinden ışınım gücü eşitlik 11.19' da verilmiştir.

$$P_\gamma = \frac{c C_\gamma E^4}{2\pi \rho^2} \quad (11.19)$$

Burada C_γ , elektronlar için **Sand Işınım Sabiti'** dir ve;

$$C_\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{r_c}{(mc^2)^3} = 1.41733 \times 10^{-14} \frac{m s W}{GeV^4} = 8.8460 \times 10^{-5} \frac{m}{GeV^3} \quad (11.20)$$

şeklinde tanımlanır.

Farklı magnet ve eklenti aygıtları (insertion devices) içeren depolama halkalarında ise elektronun bir turda yayımlayacağı ışınımın ortalama gücünün formülasyonu önemlidir.

$$\langle P_\gamma \rangle = \frac{c}{2\pi} C_\gamma E^4 \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle = C_\gamma E^4 \frac{f_{dolanım}}{2\pi} \int \frac{ds}{\rho^2} \quad (11.21)$$

Sinkrotron ışınımının gücü bilgisi kullanılarak, yüklü bir parçacığın dairesel hızlandırıcıda hareketi sırasında dolanım başına sinkrotron ışınımı olarak kaybettiği enerji, dairesel hızlandırıcının çevresi boyunca gücün integrasyonu ile bulunur. Magnetik alanın tüm yörünge boyunca eşit uygulandığı izomanyetik bir örgüde ρ eğrilik yarıçapı ile dolanan bir elektronun tur başına kaybettiği enerji pratik birimler cinsinden Eşitlik 11.22 ile verilir.

$$U_{0,iso}(GeV) = C_\gamma \frac{E^4(GeV)^4}{\rho(m)} \quad (11.22)$$

Burada N_e , parçacık sayısı olmak üzere dolanan demetin akımı ve yayımlanan toplam ortalama güç;

$$I = e f_{dolanım} N_e \quad (11.23)$$

$$\langle P_\gamma \rangle = U_0 \frac{I}{e} \quad (11.24)$$

şeklinde ifade edilir.

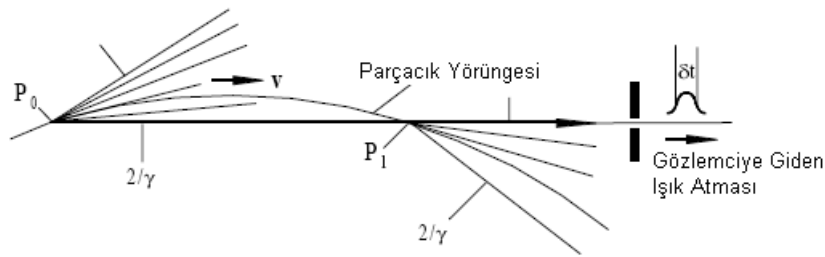
Pratik birimler cinsinden ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\langle P_s(MW) \rangle_{iso} = 0.088463 \frac{E^4(GeV)^4}{\rho(m)} I(A) \quad (11.25)$$

Işınımın parçacık enerjisine bağlılığı dairesel hızlandırıcılarda ulaşılabilen maksimum enerji açısından sınırlamalar getirmektedir.

11.5. Sinkrotron Işınımı Spektrumu

Görelî yüklü parçacıklardan yayımlanan sinkrotron ışınımı geniş bir foton enerji spektrumu oluşturur. Bu ışınım dairesel bir hızlandırıcıda gözlemciye eşit aralıklarda ışık atmaları şeklinde görünmektedir. Bir iletim hattı içindeki eğici magnetten bir kez geçen bir parçacığın yayımlayacağı ışınım ise gözlemciye tek bir ışık atması şeklinde görünecektir.



Şekil 11.3. Sinkrotron ışınımı atması

Işık atmasının zamansal uzunluğu, P_0 noktasından yayımlanan ilk fotonların gözlemciye ulaşması ile P_1 noktasından yayımlanan son fotonların gözlemciye ulaşma süresi arasındaki fark kadardır. Bu fark P_0 noktasından yayımlanan fotonların gözlemciye ulaşması ve elektron paketçığının P_0 noktasından P_1 noktasına ulaşması arasındaki zaman farkıdır.

$$t_\gamma = \frac{2\rho \sin \frac{1}{\gamma}}{c} \quad (11.26)$$

$$t_e = \frac{2\rho}{\beta c \gamma} \quad (11.27)$$

$$\delta t = t_e - t_\gamma = \frac{2\rho}{\beta c \gamma} - \frac{2\rho \sin \frac{1}{\gamma}}{c} \quad (11.28)$$

Sinüs fonksiyonunu küçük açılar için doğrusal ve üçüncü dereceden terimleri içerecek şekilde seriye açılarak gözlemcinin bulunduğu noktada ışık atmasının zamansal uzunluğu ifadesi;

$$\delta t = \frac{4\rho}{3c\gamma^3} \quad (11.29)$$

şeklinde sadeleştirilir.

Enerjinin küpü ile ters orantılı olduğu görülen kısa atma süresi geniş bir spektruma sebep olmaktadır. Etkin atma uzunluğu olarak bu sürenin yarısı alınır, spektrumun maksimumuna ulaştığı sinkrotron ışınımının kritik frekansı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\omega_c \approx \frac{1}{\frac{1}{2}\delta t} \approx \frac{3}{2}c \frac{\gamma^3}{\rho} \quad (11.30)$$

Buna karşı gelen enerjiye, $\varepsilon_{kritik} = \hbar\omega_{kritik}$, ise sinkrotron ışınımı için **kritik enerji** denir.

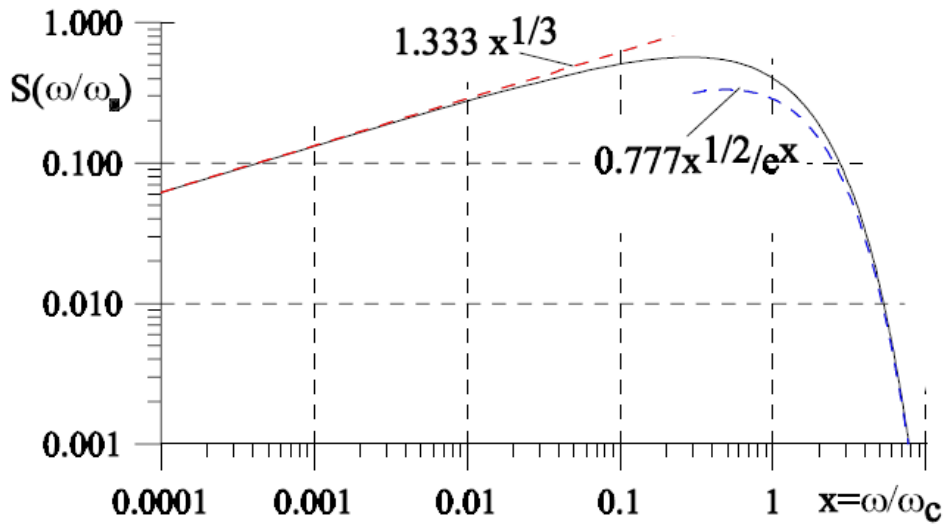
$$\varepsilon_{kritik} = C_c \frac{E^3}{\rho} \quad (11.31)$$

$$C_c = \frac{3\hbar c}{2(mc^2)^3} \quad (11.32)$$

Kritik enerji ifadesi elektronlar için Eşitlik 11.33' te verilmiştir.

$$\varepsilon_c(\text{keV}) = 2.2183 \frac{E^3(\text{GeV})^3}{\rho(\text{m})} = 0.66503 E^3(\text{GeV})^2 B(\text{T}) \quad (11.33)$$

Kritik enerji değeri sinkrotron ışınımı spektrumunun pikine karşılık gelen enerjidir ve foton yoğunluğu bu pik değerinin her iki yanında eşittir. Dairesel bir hızlandırıcıdaki göreceli hızlarda hareket eden yüklü bir parçacığın yayımladığı sinkrotron ışınımı spektrumu parçacığın dolanım frekansının, kritik frekans çevresindeki harmoniklerinden oluşur. Sinkrotron ışınımı özel bir uzaysal ve spektral dağılıma göre yayımlanır.



Şekil 11.4. Sinkrotron ışınımı spektrumunu ortaya koyan evrensel fonksiyon

Yayımlanan foton yoğunluğuna ilişkin önemli bir parametre foton akısıdır. Foton akısı tanım olarak; birim katı açı başına ve birim bant genişliğine (%0.1 bant genişliği) düşen foton sayısıdır.

$$\frac{d^2 \dot{N}_{foton}}{d\theta d\psi} = C_\Omega E^2 I \frac{\Delta\omega}{\omega} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 K_{\frac{2}{3}}^2(\xi) F(\xi, \theta) \quad (11.34)$$

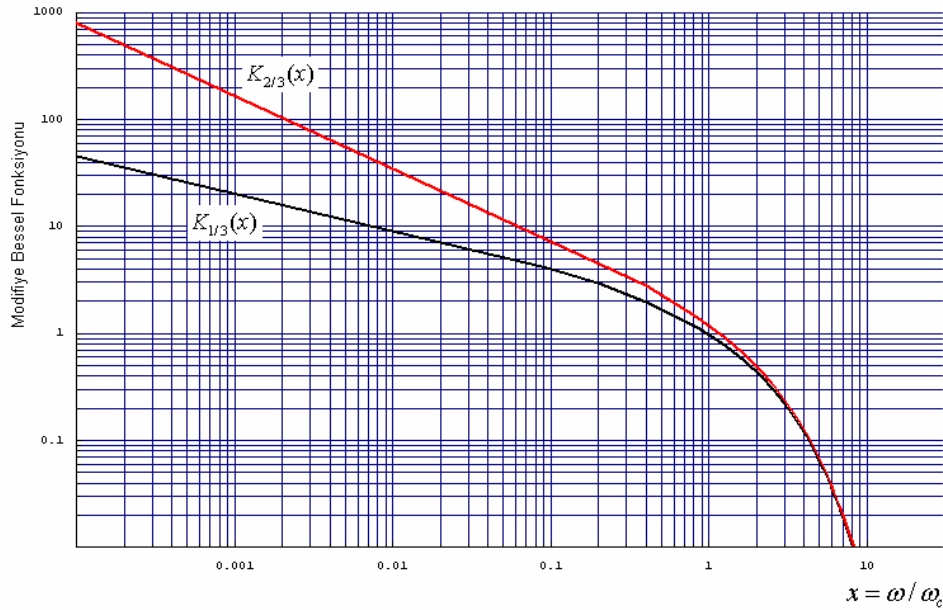
Burada ψ sapma düzlemindeki açı, θ ise sapma düzlemine normal açıdır.

$$C_{\Omega} = \frac{3\alpha}{4\pi^2 e(mc^2)^2} = 1.3255 \times 10^{16} \frac{\text{foton}}{\text{s.mrad}^2 \cdot \text{GeV}^2 \cdot \text{A. \%100bg}} \quad (11.35)$$

$$F(\xi, \theta) = (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \frac{K_{1/3}^2(\xi)}{K_{2/3}^2(\xi)} \right) \quad (11.36)$$

Burada α elektromanyetik ince yapı sabiti, $K_{1/3}(\xi)$ ve $K_{2/3}(\xi)$ modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. Fonksiyonların argümanı Eşitlik 5.37'de belirtilmiş davranışları ise Şekil 5.5' te gösterilmiştir.

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_{\text{kritik}}} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{3/2} \quad (11.37)$$



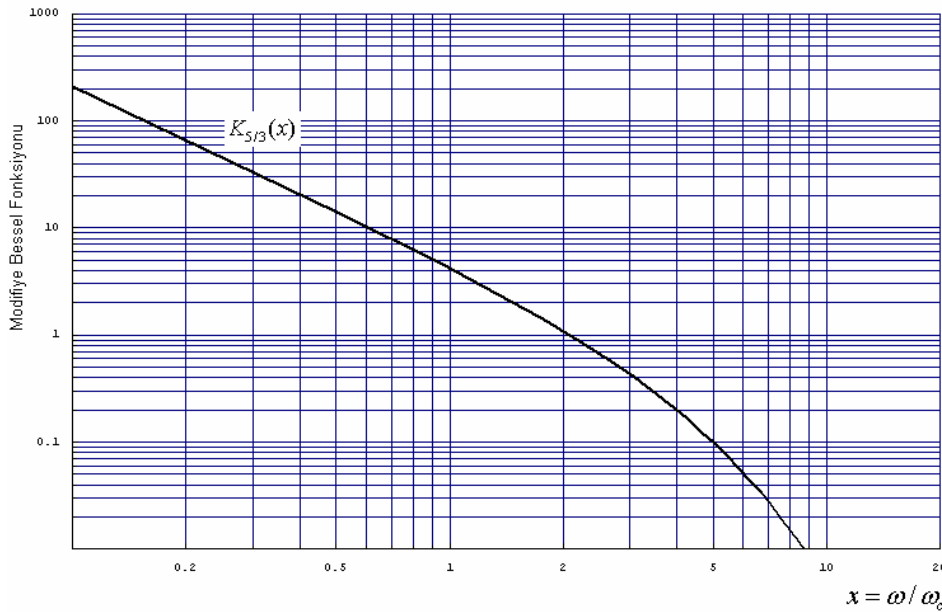
Şekil 11.5. $K_{2/3}(x)$, $K_{1/3}(x)$ Bessel fonksiyonlarının frekansa göre değişimi

Sinkrotron ışınımı, saptırıcı manyetik alana dik yönde (σ -mod) ve paralel yönde (π -mod) kutuplanmıştır. $F(\xi, \theta)$ fonksiyonunun kutuplanmaya ilişkin içerdiği terimlerin ayrıntıları ilgili referanstan bulunabilir.

Görelî parçacıklar için sinkrotron ışınımı ileri yönde odaklanır. Foton akısı hesabı yapılırken tüm θ açıları üzerinden integral alınır.

$$\frac{d\dot{N}_{ph}}{d\psi} = \frac{4\alpha}{9} \gamma \frac{I \Delta\omega}{e \omega} S\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) \quad (11.38)$$

$$S\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_{kritik}} \int_{\omega/\omega_{kritik}}^{\infty} K_{5/3}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (11.39)$$



Şekil 11.6. $K_{5/3}(x)$ Bessel fonksiyonunun frekansa göre değişimi

$S(\omega / \omega_{kritik})$ fonksiyonu sinkrotron ışınımı için evrensel fonksiyon olarak bilinir. Pratik birimler cinsinden foton akısı Eşitlik 11.40' ta verilmiştir.

$$\frac{d\dot{N}_{ph}}{d\psi} = C_{\psi} EI \frac{\Delta\omega}{\omega} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (11.40)$$

$$C_{\psi} = \frac{4\alpha}{9emc^2} = 3.9614 \times 10^{19} \frac{\text{foton}}{\text{s.rad.A.GeV}} \quad (11.41)$$

Sonuç olarak; spektral dağılım parçacık enerjisine, kritik frekansa ve matematiksel bir fonksiyona bağlıdır.

Fotonlar yayımlandıkları dar açı içinde Gauss eğrisi şeklinde bir dağılım gösterirler. Gauss dağılımının etkin genişliği $\sqrt{2\pi\sigma_{\theta}}$ ile verilir. Buna göre foton akısı;

$$\frac{d\dot{N}_{ph}}{d\psi} \approx \frac{d^2\dot{N}_{foton}}{d\theta d\psi} \sqrt{2\pi\sigma_{\theta}} \quad (11.42)$$

şeklinde düzenlenir. $x = \omega/\omega_c$ olmak üzere σ_{θ} , σ -modda yani manyetik alana dik kutuplanmış ışınımın açısal dağılımıdır.

$$\sigma_{\theta}(\text{mrad}) = \frac{C_{\psi}}{\sqrt{2\pi}C_{\psi}} \frac{1}{E} \frac{S(x)}{x^2 K_{2/3}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{f(x)}{E(\text{GeV})} \quad (11.43)$$

Sinkrotron ışınımı elektron demetinin kesit alanına eşit oldukça küçük bir alandan yayımlanır. Işınım, demetin faz uzayındaki kesiti dalga boyundan küçük olması halinde koherent (eş fazlı) olacaktır. Özellikle holografi gibi deneylerde kullanılmak üzere elde edilen ışınımın koherent olması oldukça önemlidir.

Parçacık demetinin faz uzayındaki alanını azaltarak kaynak boyutlarını düşürmek, demet emittansının azaltılmasında kırınım etkilerinden dolayı bir noktaya kadar etkilidir. Yüksek derecede odaklanmış foton demeti için Fraunhofer kırınımı göz önünde tutulmalıdır.

Parçacık demetinin emittans özelliğinden yararlanılarak karakterize edilmesi gibi foton demeti içinde aynı şey yapılabilir. Yatay ve düşey düzlemlerde demet boyutları ve diverjansları;

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sigma_r}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{x',y'} = \frac{\sigma_{r'}}{\sqrt{2}} \quad (11.44)$$

ile ifade edilir.

Buna göre kırınım limitli foton demeti emittansı,

$$\varepsilon_{foton,x,y} = \frac{1}{2} \sigma_r \sigma_{r'} = \frac{\lambda}{4\pi} \quad (11.45)$$

şeklindedir. Uzaysal olarak koherent ve kırınım limitli ışınım kaynağı oluşturabilmek için parçacık demeti emittansının yukarıdaki kırınım limitli foton demeti emittansından küçük bir değer alması gerekmektedir.

$$\varepsilon_{x,y} \leq \frac{\lambda}{4\pi} \quad (11.46)$$

Kırınım limitli fotonların demet diverjansı $\sigma_{r'}$ olmak üzere fotonlar D yarıçaplı bir disk şeklinde gözlenecektir. Ayrıca girişim teorisi kullanılarak kırınım limitli foton demeti yayını ve kaynak boyutu, L elde edilir.

$$D = \sigma_{r'} L \quad (11.47)$$

$$D \sin \sigma_{r'} \approx D \sigma_{r'} = \lambda \quad (11.48)$$

$$\sigma_{r'} = \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \quad (11.49)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda L} \quad (11.50)$$

Problemler

Problem 1. Depolama halkasındaki enerjisi 800 MeV, demet akımı 1A ve yarıçapı $\rho = 1.784$ m olan bir elektron demetini dikkate alırsak, tur başına kaybedilen enerjii ve eğici magnetlerdeki toplam sinkrotron ışınım gücünü hesaplayınız.

Problem 2. Problem 5.1' deki verileri kullanarak kritik enerjisi 10 MeV olan bir foton demetini depolama halkasından x-ışını üretmek için kullanırsak demet enerjisi ne olmalıdır. Bu demet enerjisine göre manyetik alanın değerini hesaplayınız.

Problem 3. LHC' de 10 TeV enerjili dairesel proton hızlandırıcı tasarlanıyor. Çevresi 26,7 km ve yarıçapı $\rho = 2887$ m' dir. Sinkrotron ışınımının tur başına kaybettiği enerjii ve kritik foton enerjisini hesaplayınız. Demet akımı 1.64 mA ise ışınım gücünü hesaplayınız.

Problem 4. 200 mA sürüklenme demet akımına ve $\rho = 20$ m eğrilik yarıçapına sahip 7 GeV' lik bir elektron halkası düşünün. Bu halkada 8 keV' lik bir foton enerjisinde, 10^{-4} bant genişliğine sahip bir numune için yapılacak deneyde, pratik birimler cinsinden foton akısını hesaplayınız.

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c} = 0.2103 \text{ için } \int_{\frac{\omega}{\omega_c}}^{\infty} K_{5/3}(\bar{x}) d\bar{x} = 4.31303 \right)$$

Problem 5. 7 GeV' lik bir elektron halkasında, $x = \frac{\omega}{\omega_c} = 0.2103$ için, $S(x) = 0.562$ ve

$K_{2/3}^2(x/2) = 20.99$ ise σ_θ , manyetik alana dik kutuplanmış ışınımın açısai dağılımını hesaplayınız.