Limit

Bu bölümde, matematik analizde temel bir görevi olan *limit* kavramı incelenecektir. Analizdeki bir çok problemin çözümünde limit kavramına gereksinim duyulmaktadır. Bunlardan bazıları; bir noktada bir eğriye çizilen teğetin bulunması, fonksiyonun, tanımlı olmak zorunda olmadığı bir noktanın çok yakınındaki noktalardaki, veya sonsuzdaki, davranışının belirlenmesi, grafiğinin çizilmesi, fonksiyonun grafiği altında kalan düzlemsel bölgenin alanının bulunması gibi problemlerdir.

Örneğin, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonu, her $x \neq 1$ reel sayısı için tanımlıdır. Böylece, $x \neq 1$ için $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ yazılabilir. Bu da; $x = 1$ noktası dışındaki tüm reel sayılar için $f(x) = x+1$ fonksiyonunu verir. Bu durumda, 1 sayısına oldukça yakın olan x değişkenlerinin $f(x)$ görüntüleri "2" değerine çok yakın olacaktır.

Böylece, limit kavramının sezgisel tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.1. *f fonksiyonu, x_0 sayısını kapsayan bir açık aralıkta, belki x_0 hariç, tanımlı olsun. x değerleri x_0 sayısına yeterince yakın, ama x_0 değerinden farklı alınarak, $f(x)$ değerleri L sayısına istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa, x değişkeni x_0 sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L sayısıdır, denir ve*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir.

Uyarı 2.2.

1. Bu tanıma göre; f fonksiyonu x_0 noktasında tanımlı olmak zorunda değildir, ancak, x_0 noktasının bir civarındaki noktalarda tanımlı olmalıdır.

2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ gösterimi, $x \to x_0$ iken $f(x) \to L$ olarak da yazılır.

3. "$\lim_{x \to x_0} f(x)$ var" ifadesi, "L sonlu olmak üzere, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$" anlamındadır. Çünkü, herhangi bir reel sayı sonludur. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ (sırasıyla, eksi sonsuz ve artı sonsuz) sembollerinin eklenmesiyle elde edilen sisteme, *genişletilmiş reel sayı sistemi* denir ve $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ile gösterilir. $-\infty$ ve $+\infty$ sembolleri birer reel sayı olmayıp, her $x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < x < +\infty$ şeklinde sıralama bağıntısı vardır. Ayrıca, reel sayılar ve $-\infty, +\infty$ arasında, aşağıdaki aritmetik işlemler tanımlanır:

a bir reel sayı ise $a + \infty = (+\infty) + a = +\infty,\ a - \infty = -\infty + a = -\infty,\ \frac{a}{-\infty} = \frac{a}{+\infty} = 0,$

$a > 0$ ise $a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty$ ve $a.(-\infty) = (-\infty).a = -\infty$,

$a < 0$ ise $a(+\infty) = (+\infty)a = \_\infty$ ve $a.(-\infty) = (-\infty).a = +\infty.$

$$
\begin{aligned}
a &\in \mathbb{R} \Longrightarrow a + \infty = (+\infty) + a = +\infty,\ a - \infty = -\infty + a = -\infty,\ \frac{a}{-\infty} = \frac{a}{+\infty} = 0, \\
a &> 0 \Longrightarrow a(+\infty) = (+\infty)a = +\infty\ ,\ a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty\ , \\
a &< 0 \Longrightarrow a(+\infty) = (+\infty)a = -\infty,\ a(-\infty) = (-\infty)a = +\infty.
\end{aligned}
$$

Ayrıca,

$(+\infty)+(+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$ ve$-\infty-\infty = (+\infty)(-\infty) = (-\infty)$

olarak tanımlanır. Ancak, $\infty - \infty,\ 0.\infty,\ \frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ işlemleri tanımlanamaz. Bunlara *belirsiz şekiller* denir.

Limitin teknik tanımı ((ε, δ) Tanımı):

f fonksiyonu x_0 sayısını kapsayan bir açık aralıkta, belki x_0 hariç, tanımlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ (ancak, küçük) sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı,

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ iken } |f(x) - L| < \varepsilon$$

i*fadesi sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, x, x_0 sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L sayısıdır, denir ve* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *ile gösterilir.*

Bu tanım, matematik semboller kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ni\ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1}$$

Uyarı 2.2. $x \to x_0$ iken $f(x)$ fonksiyonunun limitinin L olduğu gerçeği, (1) ile kontrol edilebilir.

Örnek 2.3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ olduğunu limitin tanımını kullanarak gösteriniz

Çözüm. Tanım 2.2 ye göre, verilen bir $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ sayısı; x değişkeni $x_0 = 1$ noktasının δ civarında ve $x \neq 1$ iken $f(x)$ değeri $L = 2$

sayısının ε civarında kalacak şekide, yani, $0 < |x-1| < \delta$ iken $|f(x)-2| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bulunmalıdır.Bu durumda, $x \neq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |f(x)-2| &= \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| \\ &= |x-1| < \varepsilon. \end{aligned}$$

buradan $\delta = \varepsilon$ seçilebilir, böylece, $0 < |x-1| < \delta = \varepsilon$ iken $|f(x)-2| < \varepsilon$ sağlanır ve $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ elde edilir.

Teorem 2.4. *Eğer* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *var ise bir tektir.*

Örnek 2.5. Limitin tanımını kullanarak

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$ (c bir sabit)
2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$
3. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

olduğunu gösteriniz.

Limitin tanımı kullanılarak, limitlerin hesabı için aşağıdaki kurallar elde edilir:

Teorem 2.6. *(Limit Kuralları)* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *ve* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$ *ise, aşağıdaki durumlar gerçeklenir:*

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x).g(x)) = L.M$
3. $\lim_{x\to x_0} c.f(x) = c.L$ (c *sabit*)
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$

Teorem 2.6 kullanılarak bir polinomun ve rasyonel fonksiyonun bir noktadaki limiti aşağıdaki gibi bulunur:

Teorem 2.7. *Eğer* $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$ ve

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

ise

$$\lim_{x\to c} P(x) = a_n c^n + \cdots + c = P(c)$$

olur.

Teorem 2.8. *$P(x)$, $Q(x)$ polinomlar olmak üzere, $Q(c) \neq 0$ ise*

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = a_n c^n + \cdots + c = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

olur.

Örnek 2.9. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm. Bu soruda, $x \to 2$ iken pay ve payda sıfıra gitmektedir. Bu durumda, limit kuralları doğrudan uygulanamaz, ancak, $x \neq 2$ için $\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ olduğu kullanılarak, limit kuralları uygulanacak bir durum elde edilir. Böylece,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{\substack{x\to 2 \\ (x\neq 2)}} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Örnek 2.10. $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-5x+4}$ limitinin var olup olmadığını araştırınız.

Çözüm. Buradaki fonksiyonun paydası için, $\lim_{x\to 1} (x^2 - 5x + 4) = 0$ ve payı için, $\lim_{x\to 1} (2x+1) = 3$ olur. Bu durumda $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \infty$ olup, limit yoktur.

Teorem 2.6 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1. n pozitif bir tamsayı iken $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$.
2. n pozitif bir tamsayı iken $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, n çift ise $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ ise kabul edilir.

Tek taraflı Limitler

Örnek 2.11. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ fonksiyonu için $\lim_{x\to 0} f(x)$ limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ olduğundan, $x_0 = 0$ noktasını içeren her açık aralık, $|f(x) - f(y)|$ istenildiği kadar 2 ye yakın olacak şekilde x, y noktalarını içerir. O halde, $x_0 = 0$ noktasına yaklaşan bütün x değerleri için, $f(x)$ değerlerinin istenildiği kadar yakın olduğu bir sayı bulunamaz.

Tanım 2.12. *f fonksiyonu bir (a, x_0) açık aralığında tanımlı olsun. x değişkeni x_0 sayısına yeterince yakın alınarak, $f(x)$ değerleri L^- sayısına istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa, x değişkeni x_0 sayısına (soldan) yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun sol taraflı limiti L^- sayısıdır, denir ve*

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L^-$$

ile gösterilir.

Sol taraflı limitin teknik tanımı ((ε, δ) Tanımı): *f fonksiyonu bir (a, x_0) açık aralığında tanımlı olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı,*

$$x_0 - \delta < x < x_0 \text{ iken } \left|f(x) - L^-\right| < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, x değişkeni x_0 sayısına (soldan) yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun sol taraflı limiti L^- sayısıdır, denir ve $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L^-$ ile gösterilir.

Bu tanım, matematik semboller kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L^- \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \ni x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow \left|f(x) - L^-\right| < \varepsilon$$

Tanım 2.13. *f fonksiyonu bir (x_0, b) açık aralığında tanımlı olsun. x değişkeni x_0 sayısına yeterince yakın alınarak, $f(x)$ değerleri L^+ sayısına istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa, x değişkeni x_0 sayısına (sağdan) yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun sağ taraflı limiti L^+ sayısıdı, denir ve*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L^+$$

ile gösterilir.

Sağ taraflı limitin teknik tanımı ((ε, δ) Tanımı): *f fonksiyonu bir (x_0, b) açık aralığında tanımlı olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı,*

$$x_0 < x < x_0 + \delta \text{ iken } \left|f(x) - L^+\right| < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, x değişkeni x_0 sayısına (sağdan) yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun sağ taraflı limiti L^+ sayısıdır, denir ve $\lim_{x\to x_{0^+}} f(x) = L^+$ *ile gösterilir.*

Bu tanım, matematik semboller kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\lim_{x\to x_{0^+}} f(x) = L^+ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ni x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow \left|f(x) - L^+\right| < \varepsilon.$$

Örnek 2.14. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ ve $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.15. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0,\ \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ yoktur, gösteriniz.

Teorem 2.16. *Bir f fonksiyonunun x_0 noktasında limitinin var olması için gerek ve yeter koşul, x_0 noktasında tek taraflı limitlerinin var ve birbirine eşit olmasıdır. Yani,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_{0^+}} f(x) = \lim_{x\to x_{0^-}} f(x) = L.$$

Sonsuzdaki Limitler

Bir f fonksiyonunun tanım kümesi üstten sınırsız ise, x bağımsız değişkenleri, verilen herhangi bir pozitif sayıdan daha büyük olarak alınabilir. Bu durumda, *x artı sonsuza gider* denir ve $x \to +\infty$ ile gösterilir. Benzer şekilde, f fonksiyonunun tanım kümesi alttan sınırsız ise, x bağımsız değişkenleri, verilen herhangi bir negatif sayıdan daha küçük alınabilir. Bu durumda, *x eksi sonsuza gider* denir ve $x \to -\infty$ ile gösterilir. Bir f fonksiyonunun bağımsız değişkeni x, artı (eksi) sonsuza giderken $f(x)$ değerleri bir L sayısına, istenildiği kadar yakınlaşabilir. Bu düşünce, aşağıdaki tanımda verilir:

Tanım 2.17.

1. *Yeterince büyük tüm x* değerlerine karşılık gelen $f(x)$ *değerleri bir L sayısına istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa, x artı sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L sayısıdır, denir ve*

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

   ile gösterilir.

2. *Yeterince küçük tüm x* değerlerine karşılık gelen $f(x)$ *değerleri bir M sayısına istenildiği kadar yakın yapılabiliyorsa, x eksi sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti M sayısıdır, denir ve*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

ile gösterilir.

Sonsuzdaki limitlerin teknik Tanımı:

1. *f fonksiyonu bir (a, ∞) aralığında tanımlı olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $B > 0$ sayısı,*

$$\text{her } x > B \text{ için } |f(x) - L| < \varepsilon$$

ifadesi sağlanacak şekilde bulunuyorsa, x artı sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L sayısıdır, denir ve

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

ile gösterilir.

2. *f fonksiyonu bir $(-\infty, a)$ aralığında tanımlı olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $K > 0$ sayısı,*

$$\text{her } x < K \text{ için } |f(x) - M| < \varepsilon$$

ifadesi sağlanacak şekilde bulunuyorsa, x eksi sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti M sayısıdır, denir ve

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

ile gösterilir.

Bu tanım, matematik semboller kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B > 0 \ \ni \forall x > B \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists K < 0 \ \ni \forall x < K \Longrightarrow |f(x) - M| < \varepsilon.$

Uyarı 2.19.

1. $x \to +\infty$ ve $x \to -\infty$ iken $y = f(x)$ fonksiyonu aynı L limitine yaklaşabilir. Bu durum; x in mutlak değerce çok büyük olan tüm değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerlerinin, L sayısına yeterince yakın olacağı anlamına gelir. Böylece, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ yazılır ve bu tanıma denk olan teknik tanımı şöyle ifade edilir: *Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N > 0$ sayısı,*

$$\text{her } x > |N| \text{ için } |f(x) - L| < \varepsilon$$

ifadesi sağlanacak şekilde bulunuyorsa, x artı ve eksi sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L sayısıdır, denir ve

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

ile gösterilir.

2. Eğer, x_0 yerine $\pm\infty$ alınırsa, bu durumda, Teorem 2.4 ve Teorem 2.6 geçerlidir.

Örnekler 2.20.

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{1+x} = 1$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{1+x} = -1$ olduğunu gösteriniz.

2. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

3. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda,

$$|f(x) - L| = \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

   eşitsizliğinin sağlanması için $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ olmalıdır. Böylece, $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ eşitsizliğini sağlayan her x için $\frac{x}{x+1}$ in 1 e uzaklığı ε dan küçüktür. Böylece, bir M sayısı, $\frac{1}{\varepsilon}$ olarak seçilebilir. O halde, $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ limitinin olmadığını gösteriniz.

   Çözüm. Herhangi bir $(a, +\infty)$ yarı sınırsız aralığındaki noktalarda, $\sin x$ fonksiyonu -1 ile 1 arasındaki tüm değerleri salınım yaparak alır. Böylece, $x \to +\infty$ iken $\sin x$ görüntülerinin yaklaştığı bir tek L değeri var olmayıp, limit yoktur.

5. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ olduğunu gösteriniz.

   Çözüm. Uyarı 2.19 un 2. şıkkından, sonsuzdaki limit kuralları doğrudan uygulanamaz, çünkü, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}$ limiti, $\frac{\infty}{\infty}$ formunda, bir belirsiz şekildir. Bu durumda, cebirsel işlemler yapılarak, limit kurallarının uygulanabileceği bir durum elde edilir:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}{1-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1.$$

6. $a_m, b_n\neq 0$ olmak üzere, rasyonel fonksiyonun sonsuzdaki limiti aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m+\cdots+a_0}{b_n x^n+\cdots+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^{m-n}+\cdots+a_0x^{-n}}{b_n+\cdots+b_0x^{-n}}=\begin{cases}0 & m<n \text{ ise}\\ (\pm)\infty & m>n \text{ ise}\\ \frac{a_m}{b_n} & m=n \text{ ise}\end{cases}.$$

7. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$ olduğunu gösteriniz.

Sonsuz Limitler

Eğer $x\to x_0$ iken bir $f(x)$ fonksiyonunun limit davranışı "mutlak değeri sınırsız olarak artıyor" şeklinde ise, $x\to x_0$ iken $f(x)$ fonksiyonu sonsuza yaklaşır, denir.

Tanım 2.21. f fonksiyonu x_0 sayısını içeren bir aralıkta, x_0 hariç, tanımlı olsun.

1. *Eğer, x_0 sayısına yeterince olan tüm x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri, verilen herhangi yeterince büyük sayıdan daha büyük oluyorsa, $x\to x_0$ iken $f(x)$ fonksiyonu artı sonsuza yaklaşır denir ve* $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ile gösterilir.

2. *Eğer, x_0 sayısına yeterince olan tüm x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri, verilen herhangi yeterince küçük sayıdan daha küçük oluyorsa, $x\to x_0$ iken $f(x)$ fonksiyonu eksi sonsuza yaklaşır denir ve* $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ ile gösterilir.

Bu durumda, 1. (veya 2.), x değerleri x_0 sayısına yeterince yakın yapılarak, $f(x)$ değerleri sınırsızca artar (sınırsızca azalır) anlamındadır.

Uyarı 2.22. $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ (veya $-\infty$) gösterimi, "∞ sembolü bir sayı gibi alınıyor ve limit var" demek değildir. Sadece, x değişkeni x_0

a yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin sınırsızca büyüdüğünü (veya küçüldüğünü) belirtmek için kullanılır.

Sonsuz limitlerin Teknik Tanımı: *f fonksiyonu x_0 sayısını kapsayan bir açık aralıkta, x_0 hariç, tanımlı olsun.*

1. *Her $B>0$ (ancak, büyük) sayısı için bir $\delta>0$ sayısı,*

$$0<|x-x_0|<\delta \text{ iken } f(x)>B$$

   ifadesi sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, x x_0 sayısına yaklaşırken $f(x)$ artı sonsuza yaklaşıyor, denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

   ile gösterilir.

2. *Her $K<0$ sayısı için bir $\delta>0$ sayısı*

$$0<|x-x_0|<\delta \text{ iken } f(x)<K$$

   ifadesi sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa, x x_0 sayısına yaklaşırken $f(x)$ eksi sonsuza yaklaşıyor, denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$$

   ile gösterilir.

Sembolik olarak:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall B>0\ \exists\delta>0\ \ni 0<|x-x_0|<\delta \text{ iken } f(x)>B$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K<0\ \exists\delta>0\ \ni 0<|x-x_0|<\delta \text{ iken } f(x)<K.$

Tek taraflı sonsuz limitler için

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0^-} f(x) &= -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) &= -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \end{aligned}$$

tanımları benzer olarak yapılır.

Örnek 2.23.

1. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$ ve $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$ olduğunu gösteriniz.

Sonsuzdaki Sonsuz Limitler

x çok büyürken $f(x)$ değerleri de çok büyük oluyorsa, bu durum,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

gösterimi ile ifade edilir. Benzer olarak, $f(x)$ fonksiyonunun davranışları aşağıdaki gösterimlerle ifade edilir:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Örnek 2.24.

1. $\lim_{x\to +\infty} 2x = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} (-2x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty.$
2. $\lim_{x\to +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$ olur, gerçekten, $\lim_{x\to +\infty} (x^3 - x^2) = (+\infty) - (+\infty)$ olur, bu durumda cebirsel işlemler ile, $\lim_{x\to +\infty} x^2(x-1) = (+\infty).(+\infty) = +\infty$ bulunur.
3. $\lim_{x\to +\infty} (2x^2 - 3x + 7) = \lim_{x\to +\infty} x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = (+\infty).2 = +\infty.$

Limit kurallarının doğrudan uygulanamadığı durumlarda, limitin hesabı için aşağıdaki test çok kullanışlıdır.

Teorem 2. *(Sıkıştırma Teoremi) x değişkeni x_0 a yaklaşırken $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının limitleri aynı L sayısı olsun ve bir f fonksiyonunun $f(x)$ değerleri, $g(x)$ ile $h(x)$ arasında kalsın. Bu durumda, x değişkeni x_0 a yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti var olup, değeri L sayısıdır:*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ ve } \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Analizde $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ limiti çok önemlidir. Doğrudan limit kuralları kullanılırsa $\frac{0}{0}$ belirsiz şekli ile karşılaşılır. Bu durumda, sıkıştırma teoremi kullanılarak limit hesaplanabilir.

Ödev 2.25.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$ olduğunu gösteriniz.