3.9 Yüksek Mertebeden Türevler

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ifadesine f fonksiyonunun türevi veya birinci türevi denir. Eğer f' fonksiyonu da türevlenebiliyor ise

$$(y')' = y'' = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

türevine f nin ikinci (basamktan veya mertebeden) türevi denir. Yine f'' fonksiyonunun da türevlenebilir olması halinde

$$(y'')' = y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$$

ifadesine de f nin üçüncü türevi denir. Türevlenebilirlik var olduğu sürece daha yüksek mertebeden türevler bulunabilir. $n > 3$ için türevin mertebesi parantez içinde doğal sayı olarak gösterilir. Buna göre n. türev

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 144 *$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$ fonksiyonu için $f^{(5)}(x) =?$*

Örnek 145 *$f(x) = \frac{1}{x}$ için $f^{(n)}(x) =?$, $f^{(n)}(1) =?$*

Örnek 146 *$f(x) = \sin x$ için $f^{(n)}(x) =?$*

Örnek 147 *$f(x) = \cos 3x$ için $f^{(n)}(x) =?$*

Örnek 148 *$f(x) = \sin^2 x$ için $f^{(n)}(x) =?$*

Örnek 149 *Aşağıdaki fonksiyonlar için $f''(0)$ var mıdır? Varsa bu türevi hesaplayınız.*

1. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

Örnek 150 *$x^3+y^3+3xy+3y^2+6x+6y=0$ ile tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonu için $y''(1)=?$*

Örnek 151 *$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, fonksiyonu için*

$$f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\frac{f''(1)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

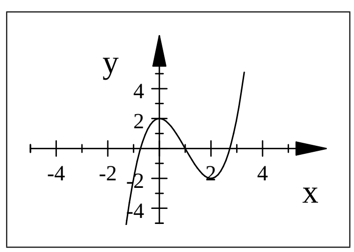
4 TÜREVİN UYGULAMALARI

Bu kesimde türevin uygulamalarından bazılarını (maksimum-minimum problemleri, grafik çizimleri, limit hesaplamaları v.b.) göreceğiz.

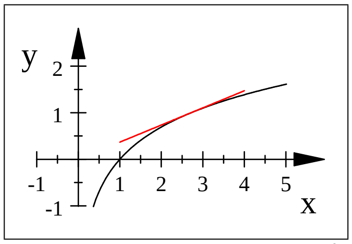
Noktasal olarak grafik çizimi grafiğin genel şeklini belirlemede yararlı olmasına rağmen sadece grafik ile ilgili bir yaklaşım belirtmektedir. Kaç noktayı çizersek çizelim iki nokta arasındaki şekli sadece tahmin ederiz. Bu kısımda bu belirsizliği gidermek için türevi nasıl kullanacağımızı göreceğiz.

4.1 Maksimum-Minimum

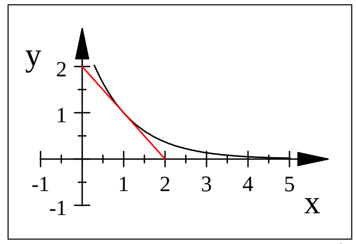
Bir fonksiyonun grafiği üzerinde soldan sağa hareket ederken fonksiyonun davranışını açıklamada artanlık ve azalanlık kavramlarını kullanacağız. Bilindiği gibi, f fonksiyonu reel sayıların bir I alt aralığında tanımlı olmak üzere eğer I aralığındaki her $x_1<x_2$ için $f(x_1)<f(x_2)$ ise f fonksiyonu I aralığında artandır. Eğer I aralığındaki her $x_1<x_2$ için $f(x_1)>f(x_2)$ ise f fonksiyonu I aralığında azalandır. Örneğin, grafiği aşağıdaki şekilde verilen fonksiyon $(-\infty,0)$ aralığında artan $(0,2)$ aralığında azalan ve $(2,\infty)$ aralığında yine artandır.



Geometrik olarak eğer bir fonksiyonun grafiği bir aralıkta pozitif eğimli teğet doğrulara sahipse bu fonksiyon o aralıkta artandır. Benzer şekilde bir aralıkta fonksiyonun teğet doğruları negatif eğimli ise fonksiyo o aralıkta azalandır.



Teğetin eğimi daima pozitif



Teğetin eğimi daima negatif

Bu düşünce ile aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 152 *f fonksiyonu (a, b) aralığının her noktasında türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu aralığın her x noktasında $f'(x) > 0$ ise f bu aralıkta artandır. (a, b) aralığındaki her x için $f'(x) < 0$ ise f bu aralıkta azalandır.*

Örnek 153 *$f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.*

Örnek 154 *$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ fonksiyonu hangi aralıkta artan, hangi aralıkta azalandır?*

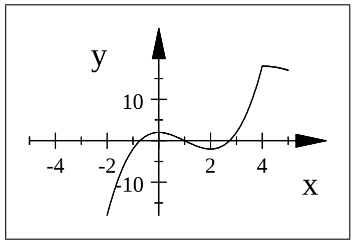
Örnek 155 *$f(x) = x^3 + 3x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.*

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $x \in A$ için $f(x) \geq f(x_0)$ olacak biçimde bir $x_0 \in A$ varsa f fonksiyonu A kümesi üzerinde mutlak minimuma sahiptir denir. $f(x_0)$ sayısına da f fonksiyonunun A kümesi üzerinde mutlak minimum değeri denir. Benzer şekilde her $x \in A$ için $f(x) \leq f(x_0)$ olacak biçimde bir $x_0 \in A$ varsa f fonksiyonu A kümesi üzerinde mutlak maksimuma sahiptir denir. $f(x_0)$ sayısına da f fonksiyonunun A kümesi üzerinde mutlak maksimum değeri denir.

Tanım 156 *x_0 noktasını içeren bir açık aralıktaki tüm x noktaları için $f(x) \geq f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında bir yerel minimuma sahiptir denir. Yine x_0 noktasını içeren bir açık aralıktaki tüm x noktaları için $f(x) \leq f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında bir yerel maxsimuma sahiptir denir. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında yerel minimum veya maksimuma sahipse bu noktada yerel ekstremuma sahiptir denir.*

Uyarı 157 *Yerel ekstremum değer ile mutlak ektremum değer kavramları birbirinden ayırt edilmelidir. Mutlak ektremum değeri fonksiyonun tanım kümesi üzerinde veya belirtilen bir küme üzerindeki en büyük veya en küçük değeridir. Ancak yerel ekstremum değeri ise fonksiyonun lokal bir aralık (veya bölge) üzerinde aldığı en büyük veya en küçük değeridir.*

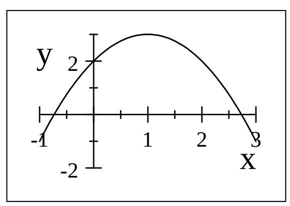
Örnek 158 *Şekideki grafiğe sahip $f : [-2,5] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 0 ve 4 noktalarında yerel maksimuma 2 noktasında ise bir yerel minimuma sahiptir. Yine bu fonksiyon -2 de mutlak minimuma ve 4 noktasında mutlak maksimuma sahiptir.*



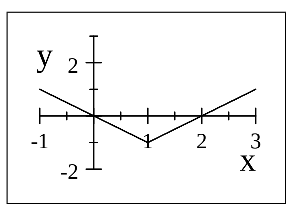
Uyarı 159 *Bu açıklamalara göre x_0 noktasında sürekli olan f fonksiyonu bu noktanın solunda artan, sağında azalansa x_0 noktası bir yerel maksimum noktadır. Yine f fonksiyonu x_0 noktasının solunda azalan, sağında artansa x_0 noktası bir yerel minimum noktadır. Dolayısıyla f fonksiyonunun yatay teğete sahip olduğu noktalar yerel ekstremum noktalarıdır. Bununla birlikte fonksiyonun türevlenemediği noktalarda da yerel ekstremum olabilir. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.*

Teorem 160 *Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında yerel ekstremuma sahipse ya $f'(x_0) = 0$ ya da f bu noktada türevlenemezdir.*

Örnek 161 $f(x) = 3 - (x-1)^2$ *ile verilen fonksiyon için $x_0 = 1$ noktası bir yerel maksimum noktadır ve $f'(1) = 0$ dır.*



Örnek 162 $f(x) = |x-1| - 1$ *ile verilen fonksiyon için $x_0 = 1$ noktası bir yerel minimum noktadır ve f bu noktada türevlenemez*



Örnek 163 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 1$ *fonksiyonu için $x_0 = 0$ bir yerel minimum noktadır ve f bu noktada türevlenemez.*

Tanım 164 $f'(x) = 0$ *olan x noktalarına f nin duraklama noktaları denir. f fonksiyonunun duraklama noktalarına veya tanım kümesine ait türevlenemediği noktalara f nin kritik noktaları denir.*

Yukarıdaki tanım ve teorem birlikte düşünülürse bir fonksiyonun ekstremum noktalarının kritik noktalarda olduğu söylenebilir. Ancak her kritik nokta fonksiyonun bir ekstremum noktası değildir.

Örnek 165 *$f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(x) = 3x^2$ olup $x_0 = 0$ bir kritik noktadır. Ancak bu nokta bir yerel ekstremum nokta değildir. Yine*

$$g(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x > 0 \\ 0 & \quad x = 0 \\ -x^2-1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında türevlenebilir değildir. Dolayısıyla bu nokta bir kritik noktadır ancak bir yerel ekstremum nokta değildir.

Örnek 166 *$f(x) = 3x^5 - 20x^3$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Bunlardan hangileri yerel ektsremum noktadır.*

Örnek 167 *$f(x) = x \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ de yerel ekstremum noktalarını bulunuz.*

Yukarıdaki gözlemler ışığında şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 168 (Birinci Tütev Testi) *x_0 noktası f nin bir kritik noktası ve f bu noktada sürekli olsun.*

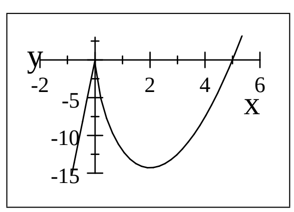
1. *Eğer x_0 noktasının solundaki bir açık aralıkta $f'(x) > 0$ ve sağındaki bir açık aralıkta $f'(x) < 0$ ise x_0 noktası f nin bir yerel maksimum noktasıdır.*

2. *Eğer x_0 noktasının solundaki bir açık aralıkta $f'(x) < 0$ ve sağındaki bir açık aralıkta $f'(x) > 0$ ise x_0 noktası f nin bir yerel minimum noktasıdır.*

Buna göre sürekli f fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları f' nün işaret değiştirdiği noktalardır.

Örnek 169 *$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.*

Örnek 170 *$f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz. $x_0 = 0$ yerel maksimum $x_1 = 2$ yerel minimum noktadır. Fonksiyonun x_0 da türevlenemediğine dikkat ediniz.*



Teorem 171 (İkinci Türev Testi) *x_0 noktası f nin bir kritik noktası ve f bu noktada sürekli olsun.*

1. *Eğer $f''(x_0) > 0$ ise x_0 noktası f nin bir yerel minimum noktasıdır.*

2. *Eğer $f''(x_0) < 0$ ise x_0 noktası f nin bir yerel maksimum noktasıdır.*

Örnek 172 *$f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.*

Sürekli fonksiyonların bazı özelliklerini daha önce inceledik. Bunlardan en önemlisi kapalı bir aralık üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun bu aralık üzerinde mutlak ekstremum değerlerini aldığıdır. Ancak bu bilgi bu ekstremum değerlerin ne olduğunu ve hangi noktalarda bulunduğunu vermemektedir. Örneğin, $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla bu aralık üzerinde mutlak ekstremum değerlerini alır. Ekstremum değerlerin ne olduğu sorusu da önemlidir. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi ifede edebiliriz.

Teorem 173 *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f bu aralık üzerindeki mutlak ekstremum değerleini ya (a, b) açık aralığındaki kritik notalarda ya da a (veya b) uç noktasında alır.*

Buna göre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verildiğinde mutlak ekstremum değerleri bulmak için aşağıdaki yol izlenebilir. İlk olarak (a, b) aralığındaki kritik noktalar bulunur, yani türevin sıfır yaptığı noktalar ile türevlenemediği noktalar bulunur. Daha sonra fonksiyonun bu kritik noktalardaki değerlei ile $f(a)$ ve $f(b)$ değereleri hesaplanır. Bunların en büyüğü mutlak maksimum, en küçüğü mutlak minimum değerdir.

Örnek 174 *$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ biçiminde tanımlı fonksiyonun $[-1, 5]$ aralığındaki mutlak ektremum değerelerini bulunuz.*

Örnek 175 *$f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$ biçiminde tanımlı fonksiyonun $[-1, 1]$ aralığındaki mutlak ektremum değerelerini bulunuz.*

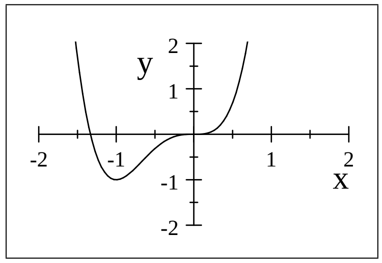
Uyarı 176 *Teorem 173, sürekli olmayan fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonu göz önüne alaım. f nin $(-1, 1)$ aralığındaki kritik noktası sadece 0 dır. Çünkü f bu noktada türevli değildir. Böylece $f(0) = 0, f(-1) = -1$ ve $f(1) = 1$ olup bunların hiç biri f nin mutlak ekstremum değeri değildir.

Açık aralıkta veya sonsuz aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonların mutlak ekstremum değerelrini bulma problemi zordur. Öncelikle böyle bir fonksiyonunu mutlak ekstremum değeri olmayabilir. Olsa bile bu değerin bulunması için kesin bir yöntem yoktur.

Örnek 177 *$f(x) = 3x^4 + 4x^3$ biçiminde tanımlı fonksiyonun $\mathbb{R}$ de mutlak ekstremumu var mıdır?*



Verilen fonksiyounun grafiğini göz önüne alınırsa mutlak minimuma sahip olduğu fakat maksimuma sahip olmadığı görülmektedir. Yine mutlak mininmum değerinin bir kritik noktada olduğu da görülmektedir.

Aşağıdaki teorem, fonksiyonunu grafiğini çizmeden mutlak ekstremum değerini bulmada kullanılabilir.

Teorem 178 *f fonksiyonu I açık aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon ve x_0 bu fonksiyonunu I aralığındaki tek yerel ekstremum noktası olsun. O zaman x_0 bir yerel minimum (maksimum) nokta ise $f(x_0)$ mutlak minimum (maksimum) değerdir.*

Örnek 179 *$f(x) = x + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerindeki mutlak ekstremum değerelerini (varsa) bulunuz.*

Örnek 180 *$f(x) = x \ln x - x$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ üzerindeki mutlak ekstremum değerelerini (varsa) bulunuz.*

4.2

4.3 Maksimum-Minimum Problemleri

Bu kesimde daha önce geliştirdiğimiz yöntemleri bazı optimizasyon peoblemlerinde nasıl kullanacağımızı göreceğiz. Optimizasyon problemleri çözülürken şu yolu izlemede yarar vardır. İlk olarak verilenler değişkenlerle gösterilir, maksimumu veya minimumu istenen çokluk bu değişkenlerle ifade edilir, verilenler kullanılarak tek değişkenli bir fonksiyon bulunur, fonksiyondaki bağımsız değişkenin sınırarı tespit edilir, son olarak yukarıda verilen yöntemler kullanılarak fonksiyonun mutlak ektremum değeri hesaplanır.

Örnek 181 *$P(\frac{5}{2},0)$ noktasının $y=\sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını bulunuz.*

Çözüm 182 *İstenen uzaklık, P noktası ile verilen eğrinin noktaları arasındaki uzaklıklarının en küçüğüdür. $A(x,\sqrt{x})$ verilen eğri üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere*

$$|AP|=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+x}$$

olur. Ozaman $d(x)=\sqrt{(x-\frac{5}{2})^2+x}$ fonksiyounun $[0,\infty)$ üzerindeki en küçük değeri sorulmaktadır. Bunun için

$$f(x)=(x-\frac{5}{2})^2+x$$

fonksiyounun $[0,\infty)$ üzerindeki en küçük değerini bulmak yeterlidir. Çünkü f yi en küçük yapan değer d yi de en küçük yapar.

$$f'(x)=2x-4$$

olup f nin $(0,\infty)$ aralığındaki tek yerel ekstremum noktası $x=2$ dir ki bu nokta bir yerel minimum noktadır. Ozaman f nin $(0,\infty)$ üzerindeki en küçük değeri $f(2)=\frac{9}{4}$ dür. Ayrıca $f(0)=\frac{25}{4}$ olduğundan f nin $[0,\infty)$ üzerindeki en küçük değeri $\frac{9}{4}$ olur. Sonuç olarak istenen en küçük uzaklık $d(2)=\frac{3}{2}$ olur.

Örnek 183 *Toplamları 40 olan iki pozitif tam sayının kareleri toplamı en fazla kaç olur.*

Çözüm 184 *Bu tam sayılar x ve y olsun. Verilenlere göre $x+y=40$ olmalıdır. x^2+y^2 ifadesinin en büyük değeri sorulmaktadır. $y=40-x$ olduğundan $f(x)=x^2+(40-x)^2$ fonksiyonunun $[1,39]$ aralığındaki en büyük değeri bulunacaktır.*

$$f'(x)=4x-80$$

olduğundan $x=20$ kritik noktadır. O zaman $f(20)=400$, $f(1)=f(39)=1521$ olduğundan istenen en büyük değer 1521 dir.

Örnek 185 *16 cm eninde 30 cm boyunda bir kartonun köşelerinden eşit kareler kesilip üstü açık bir kutu yapılıyor. Karelerin kenarı ne olmalıdır ki, kutunun hacmi maksimum olsun?*

Çözüm 186 *Karenin bir kenarı x olsun. O zaman yapılacak kutunun hacmi*

$$\begin{aligned} V(x) &= x(16-2x)(30-2x) \\ &= 480x - 92x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

olur. Burada x uzunluğu temsil ettiğinden neğatif olamaz. Ayrıca dikdörtgenin eni 16 cm olduğundan x en fazla 8 cm olabilir. Dulayısıyla V nin $[0,8]$ üzerindeki en büyük değeri sorulmaktadır.

$$V'(x) = 480 - 182x + 12x^2 = 0$$

$480 - 184x + 12x^2 = 0$ ise $x = \frac{10}{3}$ veya $x = 12$ olur. $x = 12$ noktası $[0,8]$ aralığının dışındadır. O zaman V nin en büyük değeri ya uç noktalarda ya da kritik nokta olan $\frac{10}{3}$ tedir. $V(0) = V(8) = 0$ olduğundan hacim en fazla

$$V(\frac{10}{3}) = \frac{19600}{27}\ cm^3$$

olur.

Örnek 187 *1 litre sıvının konulacağı silindirik şekilde bir kapalı kutu yapılmak isteniyor. En az malzemenin kullanıldığı kutunun boyutları ne olmalıdır?*

Çözüm 188 *Silindirik kutunun taban yarıçapı r ve yüksekliği h olsun. Hacim $V = \pi r^2 h = 1000$ ml dir. Malzemenin en az kullanılması için yüzey alanın en küçük olması gerekir. O zaman kapalı silindirin yüzey alanı $2\pi r^2 + 2\pi r h$ olduğundan*

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerindeki en küçük değeri sorulmaktadır. $S'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0$ ise $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ tek kritik noktadır. Üstelik bu nokta bir yerel minimum noktadır. Dolayısıyla S fonksiyonu en küçük değerini $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ noktasında alır. Buna karşılık

$$h = \frac{1000}{\pi r^r} = \frac{1000}{\pi(\frac{500}{\pi})^{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

olur.

Örnek 189 *Taban yarıçapı 6 cm yüksekliği 10 cm olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?*

Örnek 190 *Hipotenüsü $\sqrt{3}$ birim olan bir dik üçgen dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Oluşan koninin hacmi en fazla ne olur?*

Örnek 191 *Yarıçapı 6 cm olan küre içine yerleştirilebilen bir dik koninin hacmi en fazla ne olur?*

Örnek 192 *Taban yarıçapı 6 cm yüksekliği 12 cm olan bir koninin içine bir başka koni ters ve tabanları paralel olacak şekilde yerleştiriliyor. Yerleştirilen koninin taban yarıçapı ve yüksekliği ne olmalıdır ki hacmi en fazla olsun.*

Örnek 193 *Yarıçapı 2 cm olan bir yarı çemberin içine bir diktörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olur.*

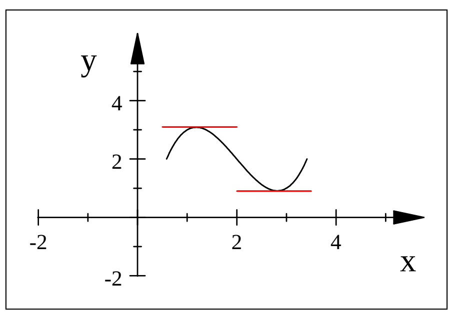
4.4 Türevle İlgili Teoremler

Bu kesimde kapalı bir aralık üzerinde sürekli, iç kısımda türevlenebilir fonksiyonların özellikleri ile ilgili bazı teoremler inceleyeceğiz. Bunların en önemlileri Rolle Teoremi ve Ortalama Değer Teoremidir.

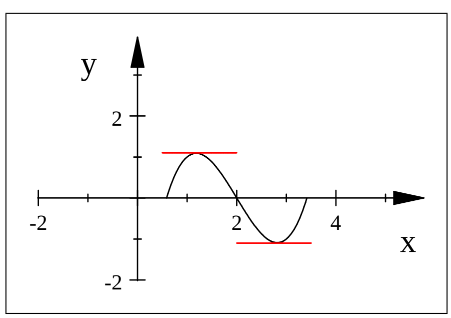
Teorem 194 (Rolle Teoremi) *f fonksiyounu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.*

Ispat. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralık üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini alır. Bunlar sırası ile M ve m olsun. Eğer $M = m$ ise f sabit fonksiyon olur ki bu durumda her $c \in (a, b)$ için $f'(c) = 0$ olur. Şimdi $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan f fonksiyonu M ve m değerlerini uç noktalarda almaz. Kabul edelim ki m değerini (a, b) aralığındaki c noktasında alsın. O zaman c bir yerel minimum nokta olup bir kritik nokta olur. f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olduğundan c de de türevlenebilirdir. Böylece bu kritik nokta sadece türevin sıfır yaptığı yer olmalıdır. Yani $f'(c) = 0$ dır. ■

Sonuç 195 *f fonksiyounu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $y = f(x)$ eğrisinin en az bir noktasındaki teğeti yataydır.*



Sonuç 196 *Kapalı aralıkta sürekli ve iç kısımda türevlenebilir olan bir fonksiyonun iki sıfır yeri arasında türevin sıfır olduğu en az bir nokta vardır.*



Örnek 197 *Rolle teoreminden yararlanarak* $5x^4-4x+1=0$ *denkleminin* $(0,1)$ *de en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.* $f(x)=x^5-2x^2+x$ *denirse* f *fonksiyonu* $[0,1]$ *de sürekli ve* $(0,1)$ *de türevlenebilirdir. Üstelik* $f(0)=f(1)=0$ *dır. O zaman Rolle teoreminden* $f'(c)=0$ *olacak şekilde en az bir* $c\in(0,1)$ *vardır.* $f'(x)=5x^4-4x+1$ *olduğundan* $5x^4-4x+1=0$ *denkleminin* $(0,1)$ *de en az bir kökü vardır.*

Örnek 198 *Simetrik bir kapalı aralık üzerinde sürekli ve iç kısımda türevlenebilir çift fonksiyonların en az bir yatay teğete sahip olduğunu gösteriniz.*

Örnek 199 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ *fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremde adı geçen c sayısını bulunuz.*

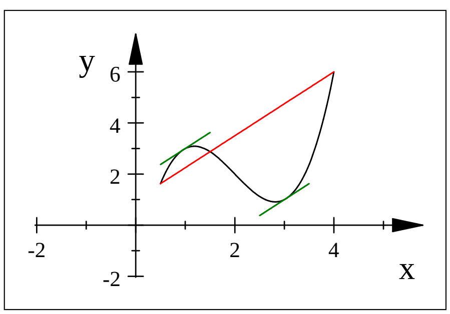
Örnek 200 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4\ln(1+x^2)$ *fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremde adı geçen c sayısını bulunuz.*

Örnek 201 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}+1$ *fonksiyonu* $[-1,1]$ *de sürekli ve* $f(-1)=f(1)$ *dir.* $(-1,1)$ *de* $f'(c)=0$ *olacak şekilde bir c sayısı var mıdır? Bu sonuç Rolle teoremiile çelişir mi? Neden?*

Şimdiki vereceğimiz teorem Ortalama Değer Teoremi olarak bilinir ve geometrik olarak, teoremdeki şartları sağlayan bir $y=f(x)$ eğrisinin $A(a,f(a))$ ve $B(b,f(b))$ noktalarından geçen kiriş doğrusuna paralel en az bir teğet doğrusunun var olduğunu söyler. Dikkat edelim ki A ve B noktalarından geçen kiriş doğrusunun eğimi

$$m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dır. Aslında bu teorem Rolle teoreminin bir genel halidir. Çünkü A ve B noktalarından geçen kiriş doğrusunun yatay olması halinda $f(a)=f(b)$ olur ki bu durum Rolle teoreminde incelenmiştir.



Teorem 202 (Ortalama Değer Teoremi) f *fonksiyounu* $[a,b]$ *aralığında sürekli,* (a,b) *aralığında türevlenebilir olsun. O zaman* (a,b) *aralığında*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

Ispat. $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $G(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ şeklinde tanımlansın. O zaman G fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilirdir. Üstelik

$$G(a) = G(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

olur. O zaman Rolle teoreminden $G'(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır. Bu durumda

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

olduğu açıktır. ■

Örnek 203 *$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonu veriliyor. $[1,2]$ aralığında f nin Ortalama Değer Teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz ve teoremde adı geçen c sayısını bulunuz.*

Örnek 204 *f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığının her x noktası için $f'(x) = 0$ ise f sabit fonksiyondur. Gerçekten, $x \in (a,b]$ olmak üzere $[a,x]$ aralığında ye Ortalama Değer Teoremini uygularsak*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(c)$$

olacak şekilde bir $c \in (a,x)$ vardır. O zaman $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c)$ olup $f'(c) = 0$ olduğundan $f(x) = f(a)$ olur. Yani her $x \in (a,b]$ için $f(x) = f(a)$ olduğundan her $x \in [a,b]$ için $f(x) = f(a)$ olur. O halde f sabit fonksiyondur.

Örnek 205 *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığının her x noktası için $f'(x) = g'(x)$ olsun. O zaman her $x \in [a,b]$ için $f(x)$ ile $g(x)$ arasındaki fark sabittir. Gerçekten her $x \in [a,b]$ için $h(x) = f(x) - g(x)$ dersek (a,b) aralığının her x noktası için $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ olur. O zaman h sabit fonksiyondur. Yani her $x \in [a,b]$ için $f(x) - g(x) = K$ (K sabit) olur.*

4.5 Belirsiz Şekiller

Bir fonksiyonun $x = a$ noktasındaki limiti araştırılırken belirsiz şekiller denilen

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

ifadelerinden biri ile karşılaşılabilir. Bu tip limitler türev yardımıyla hesaplanabilmektedir. Bu tip limitlerin hesaplanmasında kullanılacak olan ve L'Hopital Kuralı adı verilen teoremi ispatlamadan önce genelleştirilmiş ortalama değer teoremini vermek gerekmektedir.

Teorem 206 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) *f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir ve (a,b) deki her x için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda (a,b) aralığında*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır.

Ispat. Öncelikle g fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin şartlarını sağladığı dikkate alınırsa

$$g(b) - g(a) = g'(x_0)(b-a)$$

eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a,b)$ noktasının var olduğunu söyleyebiliriz. $g'(x_0) \neq 0$ olduğundan bu durum $g(b) - g(a) \neq 0$ olduğunu göserir. Şimdi

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

ile tanımlı F fonksiyonunu göz önüne alaım. F fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) de türevlenebilir olduğu açıktır. Ayrıca $F(b) = F(a)$ dır. O zaman Rolle Teoremi gereği $F'(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır. Buradan

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)]$$

olup

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

bulunur. ■

Örnek 207 *$f(x) = x^3 + x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonlarına $[0,1]$ aralığında Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabiilir ise teoremde bilirtilen c sayısını bulunuz.*

1-) $\frac{0}{0}$ **Belirsizlik Hali:** Bu belirsizlik hali aşağıdaki teorem yrdımıyla hesaplanabilmektedir.

Teorem 208 (L'Hopital Kuralı) *f ve g fonksiyonları a noktasında sürekli, a yı içeren bir açık aralıkta türevlenebilir ve bu aralıktaki her x için $g'(x) \neq 0$ olsun. Eğer*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \tag{8}$$

ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir.

Ispat. f ve g fonksiyonları a noktasında sürekli olduklarından (8) den $f(a) = g(a) = 0$ dır. Şimdi $x > a$ olmak üzere $[a,x]$ aralığında f ve g fonksiyonlarına Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremini uygulayalım. O zaman $f(a) = g(a) = 0$ olduğuda dikkate alınarak

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

eşitliğini sağlayan bir $c \in (a,x)$ noktası vardır. x, a ya yaklaşırken c de a ya yaklaşacaktır, çünkü daima a ile x arasındadır. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. Benzer ispat $x < a$ için de yapılabillir. ■

Uyarı 209 *Eğer* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *limitinde de* $\frac{0}{0}$ *belirsizlik durumu varsa L'Hopital kuralı bir kez daha uygulanır. Bu belirsizlik durumundan kurtuluncaya kadar kural tekrarlanabilir.*

Uyarı 210 *Teoremin ispayından da anlaşılacağı gibi L'Hopital Kuralı sağ ve sol taraflı limitler için de geçerlidir. Ayrıca L'Hopital kuralı*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

tipindeki limitlerin de $\frac{0}{0}$ *belirsizliğine sahip olmaları durmunda da kullanılabilir. Çünkü bu durumda* $x = \frac{1}{t}$ *yazarak* $x \to \infty$ *için* $t \to 0^+$ *olacağından*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. $x \to -\infty$ *içinde benzer durum göz önüne alınabillir.*

Örnek 211 *L'Hopital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2x^2+3x+1} = 0$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = 1$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} = -\frac{1}{2}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
6. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 3x-\cos^3 2x}{x^2} = -\frac{15}{2}$

2-) $\frac{\infty}{\infty}$ **Belirsizlik Hali:** $\frac{u}{v} = \frac{1/v}{1/u}$ düşüncesi ile $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik halindeki limitler $\frac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürülebildiğinden $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik durumunda da L'Hopital kuralı geçerlidir.

Örnek 212 *L'Hopital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

1. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = 1$
2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{1+\tan x} = 1$

3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-\cos x)}{\ln x} = 2$

3-) $0.\infty$ **Belirsizlik Hali:** $u.v = \frac{u}{1/v}$ düşüncesi ile $0.\infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ beirsizliğine dönüştürülerek L'Hopital kuralı kullanılabilir.

Örnek 213 *L'Hopital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

1. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x = 0$
2. $\lim_{x\to\infty} x\sin(\frac{1}{x}) = 1$
3. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$

4-) $\infty - \infty$ **Belirsizlik Hali:** Bu belirsizlik halide $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ beirsizliğine dönüştürülebilir. En azından $u - v = \frac{(1/v)-(1/u)}{1/uv}$ düşüncesi bunu sağlar.

Örnek 214 *L'Hopital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

1. $\lim_{x\to 0^+}(\cot x - \frac{1}{x}) = 0$
2. $\lim_{x\to 0^+}(\frac{3x+1}{\sin x} - \frac{1}{x}) = 3$
3. $\lim_{x\to 0}\left(\csc^2 x - x^{-2}\right) = \frac{1}{3}$

5-) 0^0, ∞^0 ve 1^∞ **Belirsizlik Halleri:** $y = u^v$ tipindeki fonksiyonların, x sonlu bir sayıya yaklaştığında veya $\pm\infty$ a gittiğinde limitleri bu tür belirsizlik durumlarını oluşturabilir. Bu durumda logaritma alma işlemi ile

$$\ln y = v \ln u$$

eşitliği elde edilir. O zaman $\ln y$ fonksiyonunu limiti $0.\infty$ belirsizliğine döner. Bu limit bilinen yolla hesaplandıktan sonra y fonksiyonunu limiti için doğalüstel fonksiyon kullanılır.

Örnek 215 *L'Hopital Kuralını da dikkate alarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

1. $\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^{\sin x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$
3. $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$
4. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x = 1$
5. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x} = 1$

4.6 Ek Sorular

Örnek 216 *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

1. $\lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)\sqrt{\|x\|}}{\sin(x-1)} = 2$
2. $\lim_{x\to 0} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x^3} = -\frac{1}{4}$
3. $\lim_{x\to y} \frac{\sin^{-1} x-\sin^{-1} y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}$
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x+x} = 1$
6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\sec x} = 1$
7. $\lim_{x\to 0^+} (\cot x - \csc x) = 0$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} = -\frac{1}{2}e$
9. $\lim_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$
10. $\lim_{x\to 0} (\frac{\arcsin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}$

4.7 Grafik Çizimi

Bir fonksiyonun grafigi sonsuz çoklukta nokta içerebileceğinden, bu noktaları koordinat düzleminde işaretlemek mümkün olmayabilir. Ayrıca eğri üzerindeki bir kaç noktanın belirlenerek grafiğin çizilmesi de sağlıklı olmaz. Çünkü böyle bir durumda iki nokta arasında kalan parçanın davranışı hakkında kesin bir bilgi bulunmaz. Bu nedenle fonksiyonun bazı özelliklerini kullanarak grafiğini düzgün bir şekilde çizebiliriz. Bu özelliklerin başında fonksiyonun kritik noktaları ile artanlık ve azalanlık kavramları gelmektedir. Yine fonksiyonun konvekslik ve konkavlık durumu ile varsa asimtotlarının belirlenmesi grafiğin daha net çizilmesinde yarar sağlar. Grafik çizimine geçmeden fonksiyonun konvekslik ve konkavlık durumu ile asimtotlarının nasıl belirleneceğini inceleyelim.

Düzlemde bir kümenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine bu küme içinde kalıyorsa bu kümeye konveks küme adı verilir. Örneğin üçgenlerin, karelerin ve çemberlerin iç bölgeleri birer konveks kümedir. Ancak düzlemde yıldız şeklinde bir küme konveks değildir.

Bu düşünce ile $[a, b]$ üzerinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonu verildiğinde eğer fonksiyonun grafiğinin üst tarafında kalan bölge konveks ise f fonksiyonu **konvekstir** veya **yukarı bükümlüdür** denir. Eğer fonksiyonun grafiğinin alt tarafında kalan bölge konveks ise f fonksiyonu **konkavdır** veya **aşağı bükümlüdür** denir. Örneğin $y = x^2$ fonksiyonu konveks, $y = 1 - x^2$ fonksiyonu konkavdır. Yine $y = x^3$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ aralığında konkav, $[0, \infty)$ aralığında konvekstir.

Buradan da anlaşılacağı üzere x, (a, b) aralığında artarken f nin grafiğine teğet olan doğruların eğimleri artarsa fonksiyon bu aralıkta konvekstir. Eğer teğet olan doğruların eğimleri azalırsa fonksiyon bu aralıkta konkavdır. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 217 *f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olsun.*

1. *Eğer f' fonksiyonu (a, b) aralığında artan ise f nin grafiği bu aralıkta konvekstir.*
2. *Eğer f' fonksiyonu (a, b) aralığında azalan ise f nin grafiği bu aralıkta konkavdır.*

Bir fonksiyonun artan ve azalan olduğu bölgeleri onun türevinini işareti yardımıyla belirlenebilmektedir. Eğer (a, b) aralığında f' fonksiyonu türevlenebilir ve bu aralıktaki her x için $(f')'(x) = f''(x) > 0$ ise f' fonksiyonu artan, dolayısıyla f fonksiyonu konvekstir. Eğer (a, b) aralığındaki x için $(f')'(x) = f''(x) < 0$ ise f' fonksiyonu azalan, dolayısıyla f fonksiyonu konkavdır. Buna göre f fonksiyonunu ikinci türevinin işareti yardımıyla konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyebiliriz.

Örnek 218 *$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.*

Örnek 219 *$f(x) = 3x^5 - 10x^3$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.*

Tanım 220 *Bir fonksiyonun grafiğinin teğet dğrusuna sahip olduğu ve bükeyliğinin değiştiği (konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği) noktaya büküm (dönüm) noktası denir.*

Yukarıda verilen örneklerdeki fonksiyonların büküm noktalarını belirleyebiliriz. Bu büküm noktalarında fonksiyonun ikinci türevinin 0 olduğu dikkati çekmiştir. Bununla birlikte $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ fonksiyonu için $(0, 0)$ noktası bir büküm noktasıdır. Ancak $f''(0)$ mevcut değildir. Bu örnekler dikkate alındığında aşağıdaki uyarıya dikkat etmek gerekir.

Uyarı 221 *$(c, f(c))$ noktası f fonksiyonunun bir büküm noktası ise ya $f''(c) = 0$ ya da $f''(c)$ mevcut değildir.*

Uyarı 222 *$f''(c) = 0$ olması (veya $f''(c)$ nin var olmaması) $(c, f(c))$ noktasının büküm noktası olduğu anlamına gelmez. Örneğin $f(x) = x^4$ gonksiyonu için $f''(0) = 0$ dır ancak $(0, 0)$ noktası bir büküm noktası değildir.*

Örnek 223 *$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ fonksiyonunun artan, azalan, konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. Vasa yerel extremum noktaları ile büküm noktalarını bulunuz.*

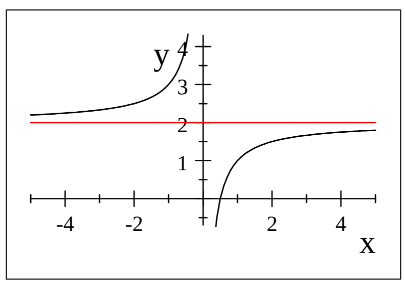
Şimdi de grafik çiziminde kullanılacak bir başka kavran olan asiptot ile ilgili bazı temel bilgiler verelim. Asimtot kavramının daha bilimsel bir tanımının olmasına rağmen kabaca fonksiyonun grafiğinin sonsuzda teğet olduğu eğri veya doğru olarak tanımlayabiliriz. Asiptotlar, Yatay-Eğik-Eğrisel Asiptotlar ve Düşey Asimtotlar olmak üzere iki guruba ayrılır.

1-) Yatay-Eğik-Eğrisel Asiptotlar: $y = f(x)$ fonksiyonu $x \to \pm\infty$ için $g(x) \to 0$ olmak üzere

$$f(x) = \phi(x) + g(x)$$

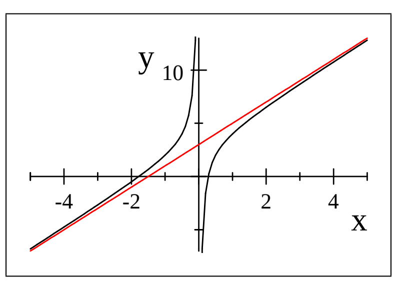
biçiminde yazılabiliyorsa $\phi(x)$ fonksiyonu f fonksiyonunu grafiğinin bir asimtotu olur. Eğer $\phi(x) = a$ (sabit) biçiminde ise yatay asimtot, $\phi(x) = ax + b$ biçiminde ise eğik asimtot ve derecesi birden büyük bir polinom ise eğrisel asimtot olur. Yatay, eğik ve eğrisel asimtotlardan bir tanesi var ise diğerleri var olmaz. Fonksiyonun grafiği sonsuzda asimtota teğet olduğundan fonksiyonun grafiği bazı hallerde bu tip asimtotları sonlu x değerlerine karşılık gelen noktalarda kesebilir.

Örnek 224 *$f(x) = \frac{2x-1}{x}$ fonksiyonu $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ biçiminde yazılabilir. Burada $\phi(x) = 2$ ve $g(x) = -\frac{1}{x}$ olarak düşünüldüğünde $\phi(x) = 2$ nin bir yatay asimtot olduğu görülebilir. Dikkat edilirse $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ dir. Bu fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.*

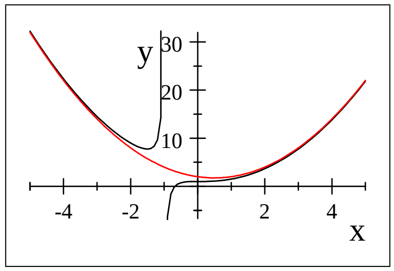


Uyarı 225 *Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu bir rasyonel fonksiyon ise bir polinom bölmesi işlemi ile yatay, eğik veya eğri asimtot bulunabilir.*

Örnek 226 *$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x}$ fonksiyonu $f(x) = 2x+3-\frac{1}{x}$ biçiminde yazılabilir. Buradan $\phi(x) = 2x + 3$ bu fonksiyonun bir eğik asimtotu olur.*

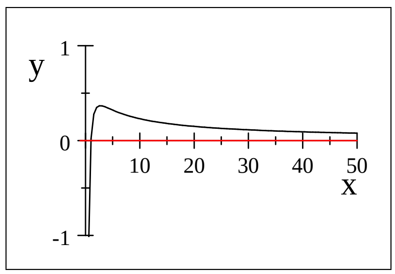


Örnek 227 *$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x+1}$ fonksiyonu ise $f(x) = x^2 - x + 2 - \frac{1}{x+1}$ biçiminde yazılabileceğinden $\phi(x) = x^2 - x + 2$ eğrisi f nin bir eğrisel asimtotu olur.*



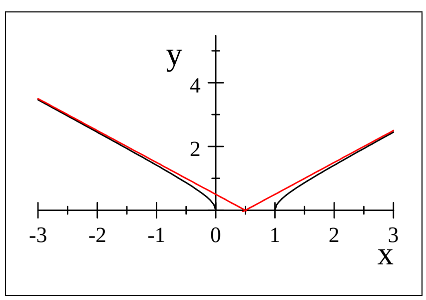
Uyarı 228 *Rasyonel fonksiyonların bu tip asimtotlarını bulmak kolay olmasına rağmen bu durum her hangi bir fonksiyon için bu kadar kolay olmayabilir. Ancak eğer* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ *oluyorsa* $\phi(x) = a$ *sabiti* f *nin yatay asimtotu olur.*

Örnek 229 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ *fonksiyonu için* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *olduğundan* $\phi(x) = 0$ *yatay asimtottur.*



Uyarı 230 $a > 0$ *olmak üzere* $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ *tipindeki fonksiyonlar için* $\phi(x) = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ *fonksiyonu eğik asimtottur.* $x \to \infty$ *için* ϕ *nin pozitif parçası,* $x \to -\infty$ *için negatif parçası kullanulır.* $a < 0$ *için* f *nin asimtotu yoktur.*

Örnek 231 $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ *egrisi için* $\phi_1(x) = x - \frac{1}{2}$ *ve* $\phi_2(x) = -x + \frac{1}{2}$ *eğik asimtotlardır.*



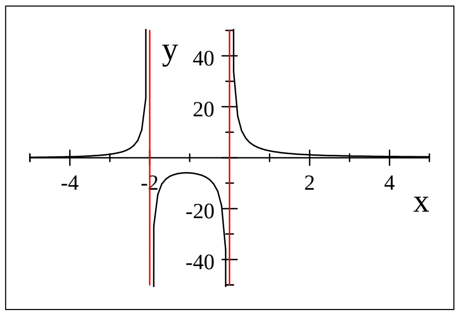
2-) Düşey Asiptotlar: a bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

eşitliklerinden biri sağlanıyorsa $x = a$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunu grafiği için bir düşey asimtottur denir. Fonksiyonların grafikleri düşey asimtotları kesmez.Bir fonksiyounu birden fazla düşey asimtotu olabilir

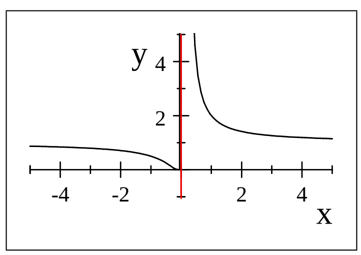
Uyarı 232 *$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ tipinde rasyonel bir fonksiyon için $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri düşey asimtot olabilir. Bu denklemin bir kökü $P(x) = 0$ denkleminin bir kökü deyilse bu bir yatay asimtottur. Eğer bu kök aynı zamanda $P(x) = 0$ denkleminin de bir kökü ise bu noktada f nin limitine bakmak gerekir.*

Örnek 233 *$f(x) = \frac{x^2+5x-14}{x^3-4x}$ eğrisinin düşey asimtotlarını bulalım. $x^3-4x = 0$ ise $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ ve $x_3 = 2$ olur. Bunlardan $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ düşey asimtotturlar, ancak* $\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{9}{8}$ *olduğundan $x_3 = 2$ düşey asimtot değildir.*



Uyarı 234 *Rasyonel fonksiyonlar için düşey asimtot bulmak için paydanın köklerini bulmak işi kolaylaştırmaktadır. Ancak herhangi bir fonksiyon için limit alınması gereken a sayısını tahmin etmek gerekir.*

Örnek 235 *$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ eğrisi için $x = 0$ doğrusundan başka bir doğrunun düşey asimtot olamayacağını anlamak gerekmektedir. Bu noktada ise* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ *olduğundan $x = 0$ bir düşey asimtottur. Dikkat edelimki burada* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ *dır.*



Yukarıda belirtilen bilgiler dikkate alınarak bir fonksiyonun grafiği çizilebilir. Bunun için aşağıda bahsedilen yolu izlemekte yarar vardır.

1. İlk olarak fonksiyonun tanım kümesi bulunur.

2. Asimtotlar bulunur.

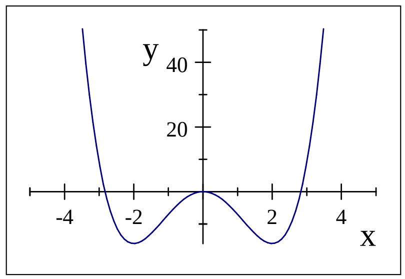
3. Eğrinin koordinat eksenlerini kestiği noktalar bulunur.

4. Birinci türevin işareti incelenir. Böylece fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ile yerel ekstremum noktaları tesbit edilir.

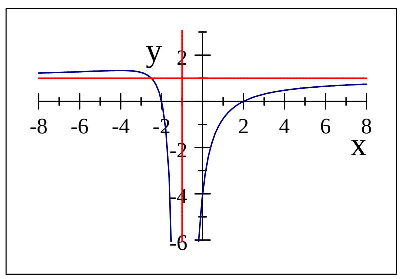
5. İkinci türevin işareti incelenir. Böylece fonksiyonun konveks ve konkav oluğu aralıklar ile büküm noktaları tesbit edilir.

6. Bu bilgiler bir tablo haline dönüştürülerek grafik çizilir.

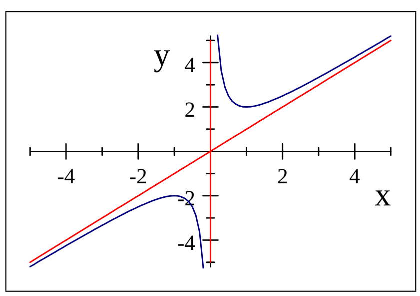
Örnek 236 $f(x) = x^4 - 8x^2$



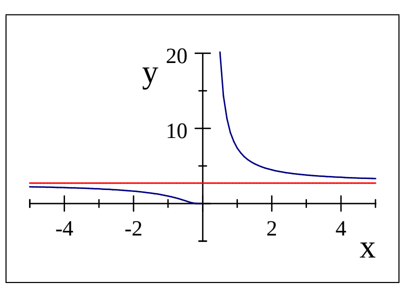
Örnek 237 $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$



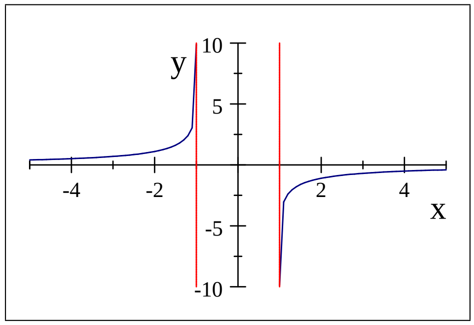
Örnek 238 $f(x) = x + \frac{1}{x}$



Örnek 239 $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$



Örnek 240 $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$



4.8 Ek Sorular

Örnek 241 *Aşağıda verilen fonksiyonların grafiğini türev yardımıyla çiziniz.*

1. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$
2. $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$
3. $f(x) = x^2 e^{-x}$
4. $f(x) = xe^{1-x^2}$
5. $f(x) = 1 - (x-2)^{\frac{2}{3}}$
6. $f(x) = x\,(x-1)^{2/3}$