MATEMATİK-I

1 GİRİŞ

Matematiğin en temel kavramı olan küme, iyi tanımlanmış (kesin ayırdedilebilir) nesne veya varlıkların topluluğu olarak tanımlanabilir. Burada iyi tanımlanmış deyimi,kümeyi oluşturan nesne veya varlıkların kesin bir şekilde şüpheye düşmeden saptanabileceğini belirtmektedir. Örneğin "Ankara Üniversitesi 1. sınıf öğrencileri" bir küme oluşturur. Kümeler genellikle A, B, C, X, Y gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a, b, c, x, y gibi küçük harflerle gösterilirler.

Bu kesimde sayı kümelerinin yapılanmaları üzerinde durmadan uygulamada kullanıldıkları biçimiyle ele alıp tanıyacağız. En iyi bildiğimiz sayı kümesi, ögelerini sayma için kullandığımız sayma sayılar kümesidir. Bu küme

$$1, 2, 3, ...$$

sayılarından oluşur ve $\mathbb{N}$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ kümesine tamsayılar kümesi denir.

Tam sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesi adı verilen daha geniş bir sayılar kümesinin alt kümesidir. Bu küme sıfırla bölme kural dışı bırakılarak, tam sayıların birbirlerine bölümlerinden oluşan sayıların kümesidir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.Yani

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

ile tanımlanır. Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine reel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}$ ile gösterilir. Bu derste $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve onun alt kümeleri üzerinde çalışacağız.

1.1 Mutlak Değer

Mutlak değer kavramı, cebirsel olarak kök içeren hesaplamalarda ve geometrik olarak da iki nokta arasındaki uzaklık kavramının belirlenmesinde önemli rol oynar.

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının 0 (sıfır) a olan uzaklığına a sayısının mutlak değeri denir. Bu sayı $|a|$ ile gösterilir.

$$|a| = \begin{cases} a & ; \quad a > 0 \text{ ise} \\ 0 & ; \quad a = 0 \text{ ise} \\ -a & ; \quad a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Aşağıdaki özellikler tanım kullanılarak kolayca elde edilir.

1. $|a| = \sqrt{a^2}$
   2. $|a|^2 = a^2$

3. $|a| = |-a|$
4. $-|a| \leq a \leq |a|$
5. $|a|^n = |a^n|$
6. $|ab| = |a|\,|b|$
7. $|a-b| = |b-a|$
8. $|a+b| \leq |a| + |b|$
9. $||a| - |b|| \leq |a-b|$

2 FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

2.1 Fonksiyonlar

Tanım ve görüntü kümeleri, reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyonun tanım kümesinin bulunması, fonksiyonların grafikleri, görüntü ters görüntü, örten ve birebir fonksiyon, ters fonsiyon, iki fonksiyonun bileşkesi, toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü, monoton fonksiyonlar, tek ve çift fonksiyonlar, parçalı fonksiyonlar.

Tanım 1 *A ve B iki küme olsun. A nın her bir elemanını B nin birtek elemanına eşleyen kurala A dan B ye bir **fonksiyon** denir. Genellikle fonksiyonlar f, g, $h \cdots$ gibi harflerle temsil edilir. A dan B ye f fonksiyonu $f : A \to B$ ve ya $A \xrightarrow{f} B$ biçiminde gösterilir. Burada A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine de **değer kümesi** adı verilir. Eğer f fonksiyonu tanım kümesinin x elemanını değer kümesinin y elemanı ile eşleştirirse, x in f altındaki görüntüsü y dir denir ve bu $y = f(x)$ biçiminde gösterilir. $y = f(x)$ bağıntısığla bir fonksiyon tanımlandığında x elemanına **bağımsız değişken**, y elemanına **bağımlı değişken** denir. $f : A \to B$ fonksiyonu için $\{y = f(x) : x \in A\}$ kümesine de f nin **görüntü kümesi** adı verilir.*

Örnek 2 *$A = [0, \infty)$ ve $B = \mathbb{R}$ olsun. A daki herbir elemana B de onun karesine karşılık getiren kural reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyondur. Böyle bir fonksiyon $f(x) = x^2$ biçiminde temsil edilir.*

Sadece kuralı verilmiş reel değişkenli ve reel değirli bir f fonksiyonun tanım kümesinin ne olduğu sıklıkla karşımıza çıkar. Bu durumda f nin tanım kümesi, $f(x)$ ifadesini reel yapan (anlamlı yapan) tüm x reel sayılarının kümesidir. Örneğin $f(x) = \sqrt{x}$ ile verilen fonksiyonun tanım kümesi $[0, \infty)$ dır. Yine $g(x) = \frac{1-x^2}{x}$ ile verilen g fonksiyonunun tanım kümesi ise $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ dır.

Bir fonksiyonla ilgili verileri kullanmak ve yorumlamak için bu verileri grafik üzerinde göstermek, fen, mühendislik ve işletme gibi alanlarda önemlidir. Tanım kümesi A olan bir f fonksiyonunun grafiği koordinat düzleminde $(x, f(x))$ sıralı ikililerinin kümesidir. Yani $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ kümesine f nin **grafiği** denir. Bu noktalar xy-düzleminde işaratlendiğinde f nin grafiği çizilmiş olur.

Örnek 3 *$f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = x^3$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz. Tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.*

Bir fonksiyonun grafiği xy-düzleminde bir eğridir. Ancak xy-düzlemindeki her eğri bir fonksiyonun grafiği değildir. xy-düzlemindeki bir eğrinin x in bir fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart her düşey doğrunun bu eğriyi en fazla bir noktada kesmesidir.

Örnek 4 *$x = y^2$ nin grafiği x in bir fonksiyonu değildir.*

Bir f fonksiyonu tanım kümesinin farklı parçalarında farklı tanımlanabilir. Bu tür fonksiyonlara parçalı tanımlı fonksiyonlar denir.

Örnek 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \quad x \geq 0 \\ \\ x - 1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

bir parçalı tanımlı fonksiyondur. Burada $f(3) = 7$ ve $f(-2) = -3$ dir.

Tanım 6 *f ve g iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü sırası ile*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x), \\ (\frac{f}{g})(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $f+g$, $f-g$ ve fg fonksiyonlarının tanım kümesi f ile g fonksiyonlarının tanım kümelerinin arakesitidir. $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun tanım kümesi ise bu arakesitte $g(x) \neq 0$ özelliğindeki tüm x noktalarının kümesidir.

Örnek 7 *$f(x) = x$ ve $g(x) = x^2 + 1$ olsun. $f+g$, $f-g$, fg ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonları ile bunların tanım kümelerini bulunuz.*

Tanım 8 *$f : A \to B$ bir fonksiyon, $E \subseteq A$ ve $F \subseteq B$ olsun.*

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}$$

*kümesine E nin f altındaki **görüntüsü**,*

$$f^{-1}(F) = \{x \in A : f(x) \in F\}$$

*kümesine de F nin f altındaki **ters görüntüsü** denir. Eğer $f(A) = B$ oluyorsa f ye **örten fonksiyon** denir. Eğer tanım kümesindeki farklı elemanların görüntüleri de farklı oluyorsa fonksiyona **birebir fonksiyon** denir. Sembolik olarak f birabirdir ancak ve ancak $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.*

Örnek 9 *$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ile $g(x) = x + 1$ fonksiyonlarının birebir ve örten olup olmadığını araştırınız.*

Tanım 10 *$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ iki fonksiyon olsun. A nın her x elemanı için $z = g(f(x))$ kuralı ile verilen fonksiyona f ile g fonksiyonlarının **bileşkesi** denir ve bu $g \circ f$ ile gösterilir. Buna göre $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ile tanımlanır.*

Örnek 11 *$f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonları için $g \circ f$ ile $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.*

Tanım 12 *$f : A \to B$ fonksiyonu birebir ve örten olsun. $(g \circ f)(x) = x$ ve $(f \circ g)(y) = y$ eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f nin ters fonksiyonu denir ve f^{-1} ile gösterilir.*

$f : A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ denkleminden x çekilip, x yerine y ve y yerine x yazıldığında $y = f^{-1}(x)$ kuralı bulunur. O halde (a, b) noktası f fonksiyonunun grafiği üzerinde ise (b, a) noktası f^{-1} in grafiği üzerindedir. Böylece f ile f^{-1} in garafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

Örnek 13 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+1$ fonksiyonunun varsa tersini bulup grafiğini çiziniz.*

Tanım 14 *f fonksiyonu reel sayıların bir I alt aralığında tanımlı olsun. Eğer I aralığındaki her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu I aralığında **artandır** denir. Eğer I aralığındaki her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu I aralığında **azalandır** denir.*

Örnek 15 *$f(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ aralığında azalan, $[0, \infty)$ aralığında artandır.*

Tanım 16 *A reel sayıların bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa A kümesine bir simetrik küme denir. Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f ye bir **çift fonksiyon**, $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f ye bir **tek fonksiyon** denir.*

Örnek 17 *$f(x) = x^2+1$ bir çift fonksiyondur. $g(x) = x^3+x$ bir tek fonksiyondur. $h(x) = 2x - x^2$ ne tek nede çift fonksiyondur.*

Çift fonksiyonların grafikleri y-eksenine göre simetriktir. Tek fonksiyonların grafikleri ise orijine göre simetriktir.