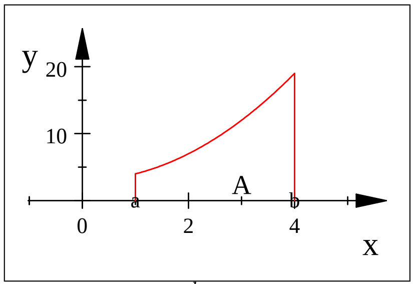
2. ALAN HESABI

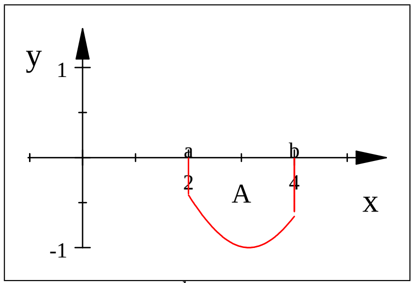
2.1 Eğri Altındaki Alan

Bu kesimde belirli integral yardımıyla eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanını hesaplayacağız. Belirli integral tanımından da hatırlanacağı gibi eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve pozitif ise $\int_a^b f(x)dx$ belirli integrali aralık üzerinde f nin grafiği altında kalan alanı vermektedir.



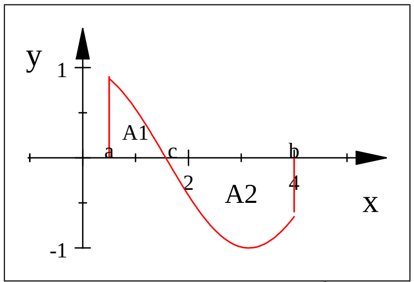
$A = \int_a^b f(x)dx$

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde negatif ise aralık üzerinde f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanı $\int_a^b -f(x)dx$ ile hesaplanır.



$A = \int_a^b -f(x)dx$

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif ve negatif değerlerden her ikisini de alıyorsa, aralık üzerinde f nin grafiği ile x-ekseni arasında kalan alan, f nin pozitif olduğu bölgedeki alan ile negatif olduğu bölgedeki alanın toplamı olur.



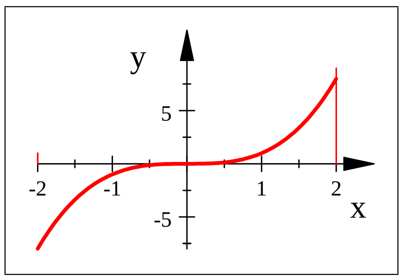
$A = A1 + A2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$

Sonuç olarak $y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise, aralık üzerinde f nin grafiği ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin toplam alanı kısaca

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

eşitliği ile hesaplanır.

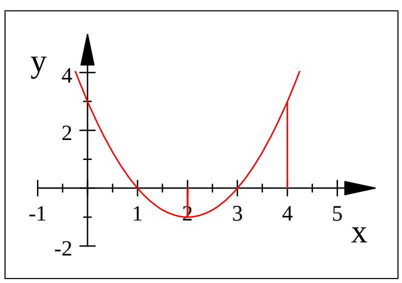
Example 1 *$f(x) = x^3$ eğrisi $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı*



$$A = \int_{-2}^{2} \left|x^3\right| dx = 8 \ br^2$$

olur.

Example 2 *$f(x) = x^2 - 4x + 3$ eğrisi, $x = 2$ ve $x = 4$ doğruları ile x-ekseni arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.*



$$A = \int_2^4 \left|x^2 - 4x + 3\right| dx = 2 \ br^2$$

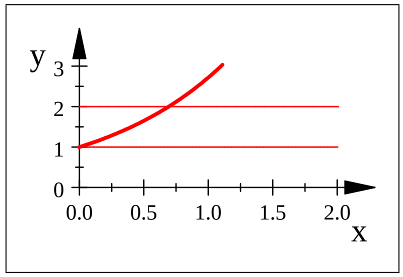
elde edilir.

Not: Benzer düşünce ile $x = u(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_c^d |u(y)|\, dy$$

şeklinde hesaplanır.

Example 3 *$y = e^x$ eğrisi, $y = 1$ ve $y = 2$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.*

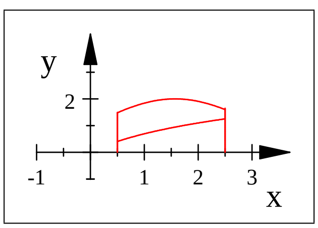


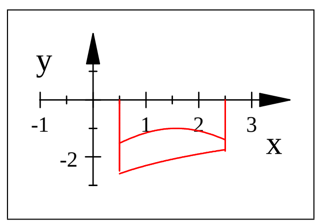
$$A = \int_1^2 \ln y dy = 2\ln 2 - 1 \ br^2.$$

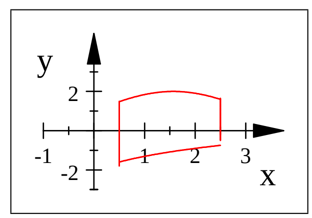
bulunur.

0.0.1 İki Eğri Tarafından Sınırlanan Alan

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığındaki her x için $f(x) \geq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere $y = f(x), y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafıdan sınırlalan bölgenin alanı aşağıdaki şekilde hesaplanır.







$A = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ $\quad$ $A = \int_a^b -g(x)dx - \int_a^b -f(x)dx$ $\quad$ $A = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b -g(x)dx$

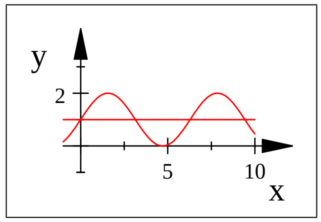
olur. Her durumda da belirtilen bölgenin alanı

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

eşitliği ile hesaplanır. Yani üstteki eğriden alttaki eğrinin çıkarılması ile

$$y_{üst} - y_{alt} = f(x) - g(x)$$

elde edilen farkın $[a, b]$ üzerindeki integrali istenen bölgenin alanını vermektedir. Ancak f ve g nin grafikleri $[a, b]$ aralığında birbirlerini kesiyorlarsa bu formül geçerli olmaz. Bu durumda f ve g nin kesişme noktaları dikkate alınarak, bu noktalar arasında $y_{üst} - y_{alt}$ farkı oluşturulmalıdır.



$$A = \int_a^{c_1} [f(x) - g(x)]dx + \int_{c_1}^{c_2} [g(x) - f(x)]dx + \int_{c_2}^{b} [f(x) - g(x)]dx$$

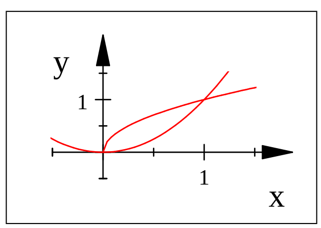
Sonuç olarak $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ise, aralık üzerinde f ve g nin grafikleri tarafından sınırlanan bölgenin toplam alanı kısaca

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

eşitliği ile hesaplanır.

Not: İki eğri arasında kalan alan hesaplanırken, integrant ile integralin sınırlarını belirlemek kolay olmayabilir. Bunları doğru tespit etmek için bölgeyi çizmek yararlı olur. Daha sonra, bölge içinde kalacak şekilde y-eksenine paralel bir şerit çizilir. Şeridin üst ve alt ucundaki eğriler belirlenir. $y_{üst} - y_{alt}$ farkı integranttır (Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz). İntegralin sınırları ise, şeridin bölge ile kesiştiği en sağ ve en sol uç noktalardır.

Example 4 *$y = \sqrt{x}$ ve $y = x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız. Önce bu eğrilerin kesim noktalarını bulalım. $x^2 = \sqrt{x}$ ise $x = 0$ ve $x = 1$ olur.*

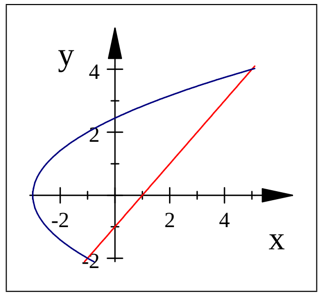


O zaman

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y_{üst} - y_{alt})dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx \\ &= \frac{1}{3}\ br^2. \end{aligned}$$

bulunur.

Example 5 *$y = x - 1$ doğrusu ile $y^2 = 2x + 6$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.*



Eğrilerin kesim noktaları $(-1, -2)$ ve $(5, 4)$ noktalarıdır. O zaman istenen bölgenin alanı (y değişkenine göre integral alarak)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_{sağ} - x_{sol}) dy \\ &= \int_{-2}^{4} [y + 1 - (\frac{1}{2} y^2 - 3)] dy \\ &= 18 \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Aynı bölgenin alanını x değişkenine göre integral alarak da hesaplayabiliriz. Bu durumda $[-3, -1]$ aralığında $y_{üst} = \sqrt{2x+6}$ ve $y_{alt} = -\sqrt{2x+6}$ olur. $[-1, 5]$ aralığında ise $y_{üst} = \sqrt{2x+6}$ ve $y_{alt} = x - 1$ olacağından istene alan

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-1} [\sqrt{2x+6} - (-\sqrt{2x+6})] dx + \int_{-1}^{5} [\sqrt{2x+6} - (x - 1)] dx \\ &= 18 \ br^2 \end{aligned}$$

olur. Ancak burada x değişkenine göre integral almak daha zordurParametrik Eğriler Tarfından Sınırlana Bölgelerin Alanı

2.2 Parametrik Eğriler Tarfından Sınırlana Bölgelerin Alanı

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen eğri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için

$$A = \int_{a}^{b} |y| \, dx$$

formülünü t değişkenine bağlı yazmak gerekir. Bu durumda $dx = g'(t)dt$ olup t nin a ve b ye karşılık gelen değereleri sırası ile t_1 ve t_2 olmak üzere

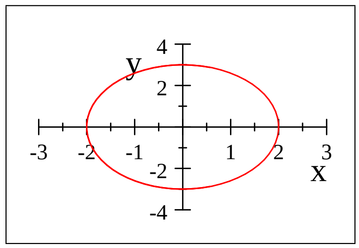
$$A = \int_{a}^{b} |y| \, dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| \, g'(t) dt$$

olur.

Example 6

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen elipsin alanını bulunuz. Önce elipsin birinci bölgede bulunan dörtte bir alanını hesplayalım.



O zaman

$$\frac{A}{4} = \int_0^a |y|\, dx$$

olur. $x = 0$ *için* $t = \frac{\pi}{2}$ *ve* $x = a$ *için* $t = 0$ *olacağından*

$$\begin{aligned} \frac{A}{4} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} |b\sin t|\,(-a\sin t)dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ &= \frac{ab}{2}(t - \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi ab}{4}\ br^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece $A = \pi ab\ br^2$ *bulunur.*