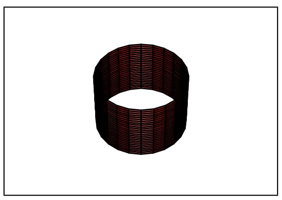
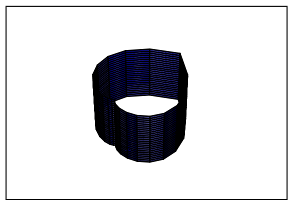
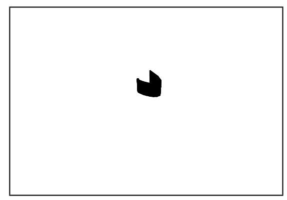
3. HACİM HESABI

Bu kesimde belirli integral yardımıyla katı cisimlerin hacmini hesaplamak için kullanılan yöntemlereden üçü üzerinde duracağız. Bir cismin hacmini bulmaya çalıştığımız zaman karşılaştığımız problem, alan hesaplarken karşılaştığımız problemin aynısıdır.

İlk olarak Silindir denilen cismi düşünerek başlayalım. Genel olarak Silindir, bir düzlemsel eğrinin sınırladığı bölgenin kendisine dik bir doğru veya eksen boyunca hareket ettirilerek elde edilen bir katı cisimdir. Silindirlerin bu eksene dik olan tüm arakesitleri büyüklük ve şekil olarak aynıdır.

Kapalı bir eğri tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı A br^2 olsun. Bu bölge kendisine dik bir doğru boyunca h birim hareket ettirildiğinde bir silindir elde edilir. O zaman bu silindirin hacmi $V = Ah$ br^3 olarak tanımlanır. Yani böyle bir silindirin hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır. Özel olarak taban, yarıçapı r olan bir daire ise silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$ br^3 olur. Taban, kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgen ise hacim $V = abh$ br^3 olur.

3.1 Kesit Yöntemi

Silindir olmayan bir S cismin hacmini bulmak için dilimleme veya kesit yöntemi denilen tekniği kullanırız. Önce S yi parçalara ayırır ve her parçanın hacmini yaklaşık olarak veren bir silindir alırız. Bütün silindirlerin hacimleri toplamı S nin hacminin yaklaşık değerini verir. Parçaların sayısının gittikçe arttığı bir limit alma işlemi ile S nin kesin hacmini buluruz. O halde hacim

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

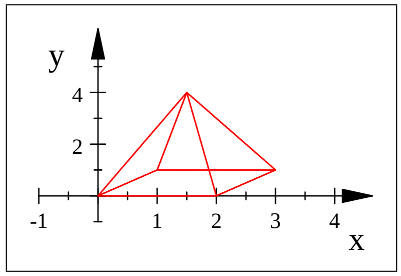
olur. Burada $A(x)$, S cisminin $[a, b]$ aralığındaki x noktasından x-eksenine dik düzlemle elde edilen kesitinin alanıdır.

Eğer S cismi y-ekseninde c ve d noktaları arasına yerleştirilmiş ise benzer düşüncelerle hacmi

$$V = \int_a^b A(y)dy$$

olur.

Example 1 *Yüksekliği h ve tabanının bir kenar uzunluğu a olan kare tabanlı* *dik piramidin hacmini bulunuz.*



$[0, h]$ *aralığında bir* y *noktasından alınan kesitin de bir kare olacağı açıktır. bu karenin bir kenarı* s *birim ise*

$$\frac{s}{a} = \frac{h-y}{h}$$

veya $s = \frac{a}{h}(h-y)$ *dir. O zaman*

$$A(y) = s^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2$$

olur. Böylece piramidin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-y)^2 2dy \\ &= \frac{a^2}{h^2}\left(-\frac{1}{3}(h-y)^3\right)_0^h = \frac{1}{3}a^2h \ br^3 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2 Disk Yöntemi

Bu yöntem dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada kullanılır ve yukarıda bahsedilen kesit yöntemine dayanmaktadır. Düzlemsel bir bölgenin düzlem içindeki bir eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen katı cisme dönel cisim denir. $y = f(x)$ eğrisi $x = a$ ve $x = b$ doğruları ve x-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin x-eksenietrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulalım. $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir noktadan alınan kesit daima bir daire olur. Kesitin alındığı noktanın apsisi x ise kesitin alanı

$$A(x) = \pi(\text{yarıçap})^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

olacağından cismin hacmi

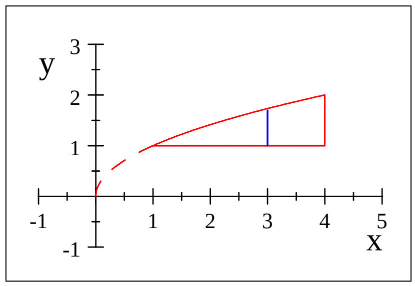
$$V = \int_a^b A(x)dx = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile y-ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmi

$$V = \pi\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy$$

olur.

Example 2 *$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $y = 1$ ve $x = 4$ doğruları arasında kalan bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.*



$[1, 4]$ aralığındaki x noktasından alınana dairesel dik kesitin yarıçapı $\sqrt{x} - 1$ olacağından kesitin alanı

$$A(x) = \pi(yarıçap)^2 = \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2$$

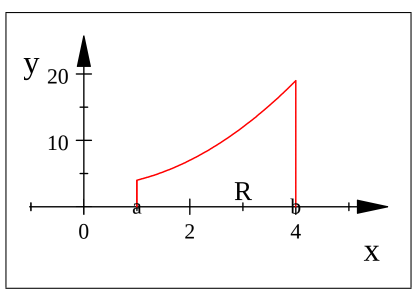
olur. O zaman dönel cismin hacmi

$$V = \int_1^4 A(x)dx = \pi \int_1^4 \left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx = \frac{7}{6}\pi \ br^3$$

olarak hesaplanır.

3.3 Kabuk Yöntemi

Bazı hacim problemlerini, şimdiye kadar kullanılan kesit ve disk yöntemleri ile hesaplamak çok zordur. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve bu aralıktaki her x için $f(x) \geq 0$ olsun. Üstten $y = f(x)$ eğrisi, alttan x-ekseni ve sol ve sağdan sırası ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile sınırlı bölge R ve R nin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim S olsun.



$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğine uygun noktalar ile n tane alt aralığa bölelim. Her bir alt aralığın genişliği $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dır. Bu noktalardan geçen ve x-ekesnine dik doğrular seçelim. Bunlar R bölgesini n tane şeride ayırır. Bu şeritlere $R_1, R_2, \cdots R_n$

diyelim ve tipik bir R_k şeridini göz önüne alalım. Bu şeridin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cisim S_k ise S cisminin hacmi S_k ların hacimleri toplamıdır. Yani

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots V_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} V_k \end{aligned}$$

olur. Genel olarak S_k bir silindirik kabul olmamasına rağmen (Çünkü R_k tam olarak dikdörtgen değildir) bir silindirik kabuğu andırır ve böylece şerit ne kadar ince seçilirse S_k bir Silindirik kabuğa o kadar benzer. Sonuçta k yıncı alt aralığın orta noktası $x'_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ olmak üzere S_k nın hacmi

$$\begin{aligned} V_k &\cong 2\pi(\text{ortalama yarıçap})(\text{kalınlık})(\text{yükseklik}) \\ &= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) f(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}) \\ &= 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

olur. Böylece S cisminin hacmi

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^{n} V_k \\ &\cong \sum_{k=1}^{n} 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

Şeritlerin sayısını $maks \Delta x_k \to 0$ olacak şekilde artırırsak

$$V = \lim_{maks \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi x'_k f(x'_k) \Delta x_k$$

olur ki bu eşitliğin sağ tarafı bir belirli integraldir. O hlde

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı})(\text{Kabuk Yüksekliği}) dx \end{aligned}$$

olur. Burada ortalama yarıçapın negatif olmaması gerektiğine dikkat edelim. Eğer $x'_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ negatif olursa hacim

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b |x| f(x) dx \\ &= 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yarıçapı})(\text{Kabuk Yüksekliği}) dx \end{aligned}$$

ile hesaplanmalıdır.

Example 3 *$y = 2x^2 - x^3$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan bölge y-ekseni etrafında döndürülerek oluşturulan katı cismin hacmini bulalım.*

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{16}{5}\pi \ br^3. \end{aligned}$$