Bölüm 5

Kutupsal Koordinatlar ve Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

Kartezyen koordinat sistemini kullanarak düzlemde bir noktanın yerini belirtebiliriz. Bu bölümde düzlemde bir noktanın yerini belirtmenin bir başka yolu olarak kutupsal koordinat sistemini ele alacağız ve eğrilerin kutupsal koordinat sisteminde nasıl çizileceğini inceleyeceğiz.

5.1 Kutupsal Koordinatlar

Tanım 5.1.1 *Kartezyen koordinat sisteminde bir $A(x,y)$ noktasının $O(0,0)$ orijine olan uzaklığı r ve O ile A noktalarını birleştiren doğru parçasının $0x$-ekseniyle pozitif yönde (saatin tersi yönünde) yaptığı açının ölçüsü α olmak üzere (r,α) ikilisine A noktasının* **kutupsal koordinatları***, α açısına* **kutup açısı***, O noktasına* **kutup noktası** *ve $0x$-eksenine* **kutup ekseni** *denir.*

α açısının ölçü birimi derece veya radyan olabilir, burada aksi belirtilmedikçe radyan olarak ele alacağız.

Kartezyen koordinat sisteminde bir $A(x,y)$ noktasının kutupsal koordinatları (r,α) olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

bağıntıları vardır. Ayrıca buradan

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

bağıntıları elde edilir.

Kutupsal Koordinatların Bazı Özellikleri:

- Bir A noktası kartezyen koordinat sisteminde bir tek (x, y) ikilisi ile belirtilmesine rağmen, kutupsal koordinat sisteminde birden fazla ikili ile belirtilebilir. Örneğin bir kutupsal koordinatı (r, α) olan noktanın diğer kutupsal koordinatları $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(r, \alpha + 2\pi n)$ şeklindedir.
- Kutupsal koordinat sisteminde (r, α) ve $(-r, \alpha + \pi)$ ikilileri aynı noktayı belirtir.
- Her α açısı için $(0, \alpha)$ kutupsal koordinatı orijin noktasını belirtir.
- (r, α) ile $(r, \alpha + \pi)$ kutupsal koordinatları orijine göre simetriktir.
- (r, α) ile $(r, -\alpha)$ kutupsal koordinatları kutup eksenine ($0x$-eksenine) göre simetriktir.
- (r, α) ile $(r, \pi - \alpha)$ kutupsal koordinatları $0y$-eksenine göre simetriktir.

Örnek 5.1.2 Kartezyen koordinatları $(1, 1)$ olan noktanın kutupsal koordinatları $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ve $\alpha = \arctan \dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$ olduğundan $(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4})$ ikilisidir. ▲

Örnek 5.1.3 Kutupsal koordinatları $(2, \dfrac{\pi}{3})$ olan noktanın kartezyen koordinatları $x = 2\cos\dfrac{\pi}{3} = 2.\dfrac{1}{2} = 1$ ve $y = 2\sin\dfrac{\pi}{3} = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ olduğundan $(1, \sqrt{3})$ ikilisidir. ▲

Örnek 5.1.4 Yarıçapı 3 birim ve merkezi $(0, 3)$ noktası olan bir çemberin kartezyen koordinatlardaki denklemi $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ dur. Bu denklemde $x = r\cos\alpha$ ve $y = r\sin\alpha$ yazılarak $r = 6\sin\alpha$ denklemi elde edilir. Böylece bu çemberin kutupsal koordinatlardaki denklemi $r = 6\sin\alpha$ dır. ▲

Örnek 5.1.5 Kutupsal koordinatlardaki denklemi $r^2 \sin\alpha\cos\alpha = 3$ olan eğrinin kartezyen koordinatlardaki denklemi $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$ ve $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ olduğu göz önüne alınırsa $yx = 3$ olarak bulunur. ▲

Kutupsal koordinat sisteminde denklemi $r = f(\alpha)$ ile verilen eğri üzerindeki bir noktanın kartezyen koordinatları

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha = f(\alpha)\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha = f(\alpha)\sin\alpha \end{aligned}$$

olur. Böylece verilen eğrinin parametrik bir denkleme sahip olduğu görülür. Bu durumda f, α nın diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olmak üzere $r = f(\alpha)$ ile verilen eğrinin bir kutup açısına karşılık gelen bir $B(r, \alpha)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimi

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\alpha}{dx/d\alpha} = \frac{r'\sin\alpha + r\cos\alpha}{r'\cos\alpha - r\sin\alpha}$$

dır. Bu teğet doğrusunun $0x$-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsüne β dersek $\tan\beta = m$ dir. Ayrıca O orijin noktası ile B noktasını birleştiren doğrunun teğet doğrusu ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsünü γ ile gösterirsek $\gamma = \beta - \alpha$ olur. Bu durumda $\tan\gamma = \tan(\beta - \alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \dfrac{r}{r'}$ elde edilir.

Örnek 5.1.6 Kutupsal koordinatlarda $r = 4\sin(3\alpha)$ denklemi ile verilen eğrinin $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ kutup açılı noktasında teğet olan doğrunun eğimini bulalım. Eğrinin

$$\begin{aligned} x &= 4\sin(3\alpha)\cos\alpha \\ y &= 4\sin(3\alpha)\sin\alpha \end{aligned}$$

parametrik denklemi aracılığıyla

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\alpha}{dx/d\alpha} = \frac{12\cos(3\alpha)\sin\alpha + 4\sin(3\alpha)\cos\alpha}{12\cos(3\alpha)\cos\alpha - 4\sin(3\alpha)\sin\alpha}$$

olup $\dfrac{dy}{dx}(\alpha = \dfrac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$ elde edilir. ▲

Örnek 5.1.7 Kutupsal koordinatlarda $r = 4(1 + \cos\alpha)$ denklemi ile verilen eğrinin $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ kutup açılı noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazalım. Yukarıda bahsedilen γ açısı için $\tan\gamma = \dfrac{r}{r'} = -\sqrt{3}$ olup $\gamma = \dfrac{2\pi}{3}$ bulunur. Bu durumda $\beta = \gamma + \alpha = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$ dir. Bu sebeple bahsedilen teğet doğrusunun eğimi $m = \tan\beta = \tan\pi = 0$ olur. Ayrıca $r_0 = 4(1 + \cos\dfrac{\pi}{3}) = 6$ olup $x_0 = r_0\cos\dfrac{\pi}{3} = 3$ ve $y_0 = r_0\sin\dfrac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ bulunur. Geçtiği noktası (x_0, y_0) ve eğimi m olan doğru denklemi $y - y_0 = m(x - x_0)$ olduğundan teğet doğrusunun denklemi kartezyen koordinat sisteminde $y = 3\sqrt{3}$, kutupsal koordinat sisteminde $r\sin\alpha = 3\sqrt{3}$ olarak elde edilir. ▲

5.2 Kutupsal Koordinatlarda Eğri Çizimi

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\alpha)$ ile tanımlanan bir fonksiyonun grafiğini çizmek için simetrilerin belirlenmesi kolaylık sağlar.

Bazı Simetriler:

- Eğer $f(-\alpha) = f(\alpha)$ ise, (r, α) ve $(r, -\alpha)$ ikilileri kutup eksenine göre simetrik olduğundan eğri kutup eksenine (yani $0x$-eksenine) göre simetriktir.
- Eğer $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ ise, (r, α) ve $(-r, -\alpha)$ ikilileri $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetrik olduğundan eğri $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna (yani $0y$-eksenine) göre simetriktir.

- Eğer $f(\alpha+\pi) = f(\alpha)$ ise, (r, α) ve $(r, \alpha+\pi)$ ikilileri kutup noktasına göre simetrik olduğundan eğri kutup noktasına (yani orijine) göre simetriktir. Eğer fonksiyonun periyodu t ise, grafiği $t/2$ uzunluklu bir aralıkta çizmek yeterlidir.

- Eğer $f(\alpha+\pi) = -f(\alpha)$ ise, (r, α) ve $(-r, \alpha+\pi)$ ikilileri aynı nokta olduğundan grafiği $t/2$ uzunluklu bir aralıkta çizmek yeterlidir.

- Eğer $f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$ ise, (r, α) ve $(r, \pi-\alpha)$ ikilileri $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetrik olduğundan eğri $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusuna (yani $0y$-eksenine) göre simetriktir.

- Eğer $f(\pi-\alpha) = -f(\alpha)$ ise, (r, α) ve $(-r, \pi-\alpha)$ ikilileri kutup eksenine göre simetrik olduğundan eğri kutup eksenine (yani $0x$-eksenine) göre simetriktir.

- $a \in \mathbb{R}$ için $f(\alpha-a) = f(\alpha)$ olsun. Bu durumda (r, α) ve $(r, \alpha-a)$ ikilileri orijine eşit mesafededir. Bu sebeple $(r, \alpha-a)$ noktasını bulmak için (r, α) noktası O noktası etrafında pozitif yönde a kadar döndürülür. Aynı düşünceyle $(r, \alpha-a)$ noktasının O noktası etrafında pozitif yönde a kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta da yine eğri üzerinde olur. Dolayısıyla $r = f(\alpha)$ ile tanımlanan fonksiyonun grafiğini çizmek için önce a uzunluklu bir aralıkta çizim yapılır, sonra elde edilen eğri O noktası etrafında pozitif yönde a kadar döndürülür ve bu işleme eğri kendi üzerine gelene kadar devam edilir.

- $a \in \mathbb{R}$ için $f(\alpha+a) = -f(\alpha)$ olsun. Bu durumda (r, α) ve $(-r, \alpha+a)$ ikilileri orijine eşit mesafededir. Bu sebeple $(-r, \alpha+a)$ noktasını bulmak için (r, α) noktası O noktası etrafında negatif yönde $\pi - a$ kadar döndürülür. Önceki duruma benzer düşünceyle $r = f(\alpha)$ ile tanımlanan fonksiyonun grafiği çizilir.

Eğri Çizimi İçin İzlenebilecek Yol:

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\alpha)$ ile tanımlı bir fonksiyonun grafiğini çizmek için aşağıdaki yolun izlenmesi kolaylık sağlar.

1. Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
2. Fonksiyonun periyodik olup olmadığı belirlenir.
3. Simetriler belirlenir.
4. Fonksiyonun 1. türevi yardımıyla eğrinin kutup noktasına yaklaştığı veya uzaklaştığı yerler belirlenir.
5. Fonksiyonun kolay hesaplanabilen noktalar için aldığı değerler bulunur.
6. Değişim tablosu düzenlenir.

7. Değişim tablosundaki bilgiler ışığında grafik çizimine başlanır.

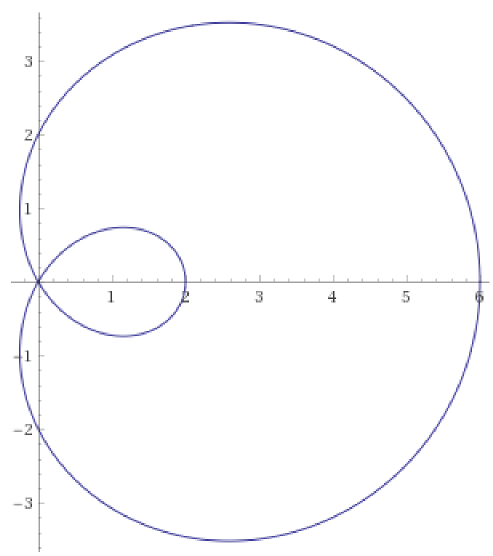
8. Simetriler (varsa) göz önüne alınarak grafiğin çizimi tamamlanır.

Örnek 5.2.1 Kutupsal koordinatlarda denklemi $r = 2 + 4\cos\alpha$ ile verilen eğriyi çizelim.

- Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
- Fonksiyon 2π periyotludur.
- cos fonksiyonu çift olduğundan $f(-\alpha) = f(\alpha)$ dır. Dolayısıyla eğri kutup eksenine göre simetriktir. Bu sebeple eğriyi çizerken $[0,\pi]$ aralığında çizip kutup ekseni göre simetriğini alırız.
- $r' = -4\sin\alpha$ olup $\alpha \in [0,\pi]$ için $r' < 0$ dır. Böylece $[0,\pi]$ aralığında α değerleri arttıkça eğri kutup noktasına yaklaşır.
-

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	6	$2+2\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{2}$	4	2	0	$2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{3}$	-2

Denklemi verilen fonksiyonun grafiği



şeklindedir. ▲