Çok Değişkenli Fonksiyonlar

Tanım 1. D düzlemin bir bölgesi, f de D nin her bir (x, y) noktasına bir $f(x, y)$ reel sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir iki değişkenli fonksiyon adı verilir. B uzayın bir bölgesi, f de B nin her bir (x, y, z) noktasına bir $f(x, y, z)$ reel sayısı karşılık getiren bir fonksiyon ise f fonksiyonuna bir üç değişkenli fonksiyon adı verilir. Daha çok değişkenli fonksiyonlar benzer şekilde tanımlanır.

Çok Değişkenli Fonksiyonların Tanım ve Görüntü Kümeleri

Reel değerli bir f fonksiyonunun tanım kümesi verilmemiş, sadece $z = f(x, y)$ bağıntısı verilmişse bu fonksiyonun tanım kümesi $f(x, y)$ ifadesini reel yapan (x, y) noktalarının kümesi olacaktır. Aynı şey üç ve daha fazla değişkenli fonksiyonlar için de geçerlidir.

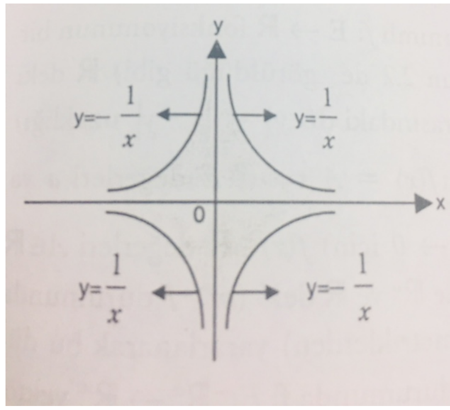
Örnek 1. $f(x, y) = arcsin(xy)$ eşitliğiyle tanımlanan f reel değerli fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm. Arksinüs fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığından $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olduğundan, tanım kümesi

$-1 \leq xy \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir. Bu durumda $x > 0$ için $-1 \leq xy \leq 1 \Rightarrow xy \leq 1 \Rightarrow y \leq \frac{1}{x}$; $x < 0$ için $-1 \leq xy \leq 1 \Rightarrow -xy \leq 1 \Rightarrow y \leq frac1x$ olur. Şimdi $y < 0$ olsun. Bu durumda $x > 0$ için $-1 \leq xy \leq 1 \Rightarrow -xy \leq 1 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{x}$; $x < 0$ için $-1 \leq xy \leq 1 \Rightarrow xy \leq 1 \Rightarrow y \geq \frac{1}{x}$ olup böylece

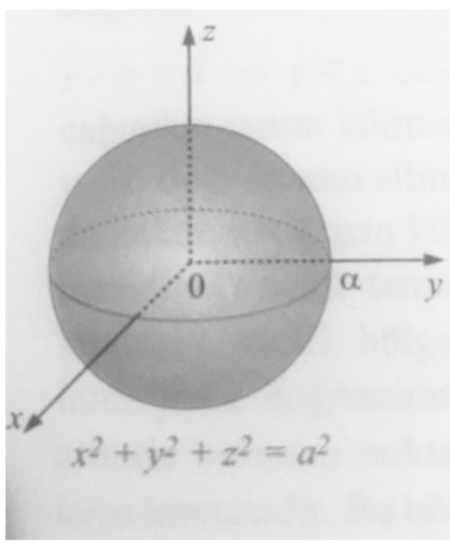
$$\begin{aligned} D(f) = \{(x, y) : x > 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\} \cup \{(x, y) : x < 0, 0 \leq y \leq frac1x\} \\ \cup\{(x, y) : x > 0, \frac{1}{x} \leq y \leq 0\} \cup \{(x, y) : x < 0, \frac{1}{x} \leq y \leq 0\} \cup \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

dır.



Örnek 2. $f(x, y, z) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$, $a \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun tanım bölgesini bulup grafiğini çiziniz.

Çözüm. $a^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $a \in \mathbb{R}$ bulunur. Bu bölge merkezi orijin ve yarıçapı a birim olan küre ve iç bölgesidir.



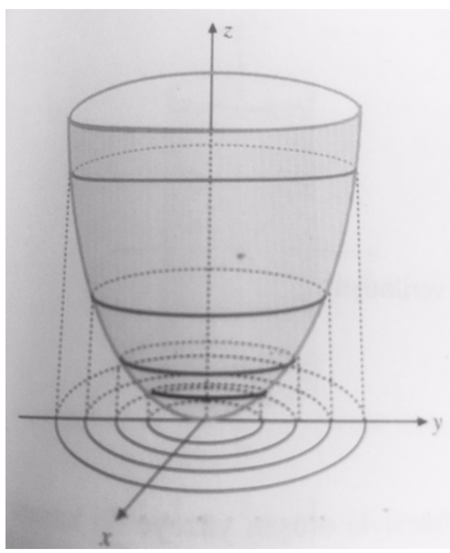
İki Değişkenli Fonksiyonların Grafikleri

Tanım 1. $z = f(x, y)$ fonksiyonu verildiğinde xOy düzleminde, fonksiyonun sabit değerler aldığı noktaların oluşturduğu eğrilere f nin seviye eğrileri denir.

Örnek 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun bazı seviye eğrilerini bulunuz. Bundan yararlanarak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

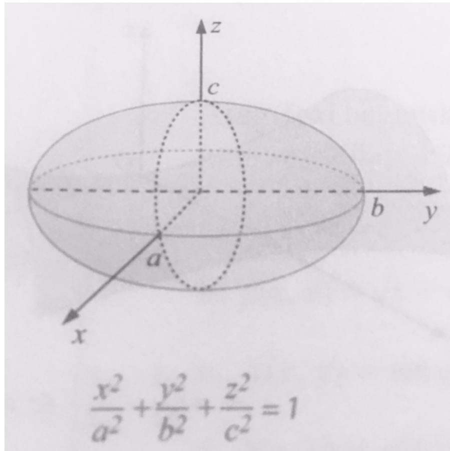
Çözüm. $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki tüm (x, y) noktalarında f fonksiyonu 1 sabit değerini alır. Dolayısıyla $x^2 + y^2 = 1$ bir seviye eğrisidir. Benzer şekilde $x^2+y^2 = 2$ ve $c > 0$ olmak üzere tüm seviye eğrileri $x^2+y^2 = c$ çemberleridir.

Fonksiyonun grafiği $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = c, z = c\}$ noktalarının grafiğidir. Bu yüzeye paraboloid adı verilir.



Bir elipsin eksenlerinden biri etrafında döndürülmesiyle oluşan bir yüzeye elipsoid denir. Elipsoid denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



dir.

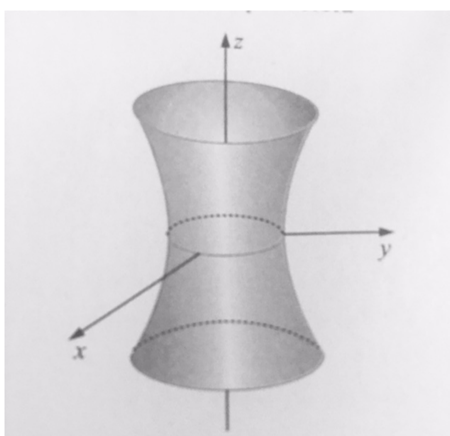
Bir hiperbolün yedek eksenlerinden biri etrafında döndürülmesiyle oluşan bir yüzeye kanatlı hiperboloid denir. Eğer hiperboloid denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

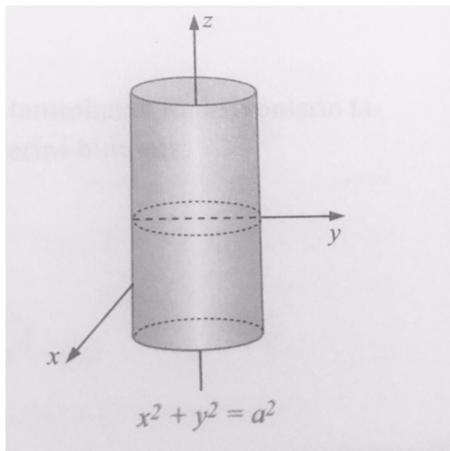
ise kanatlı hiperboloidin denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

olur.



Uzayda herhangi bir doğru uzayın herhangi bir eğrisine dayanarak kendisine paralel hareket ederse oluşan yüzeye silindir denir. Dayanak eğrisi çember ise dairesel silindir, elips ise eliptik silindir, parabol ise parabolik silindir adı verilir.



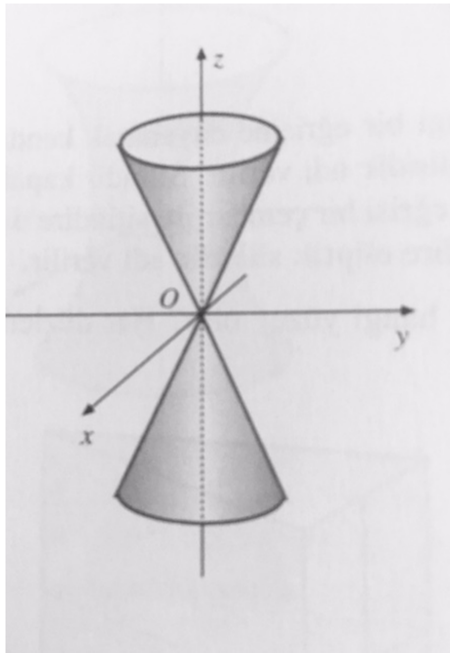
Sabit bir T noktasından geçen ve verilen eğriyi kesen hareketli bir doğrunun oluşturduğu yüzeye koni denir. T noktasına koninin tepe noktası, kestiği eğriye de koninin doğrultman eğrisi denir. Yüzeyi oluşturan hareketli doğruya koninin anadoğrusu denir. Doğrultman eğrisi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elipsi olan koninin denklemi

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir.



Limit ve Süreklilik

Tanım 1. $P(a,b)$ bir sabit nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$D(P,\varepsilon) = \{(x,y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon\}$$

kümesine $P(a,b)$ noktasının bir $\varepsilon-$ komşuluğu denir.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta \ ve \ |y-b| < \delta$$

dır.

$$|x-a| < \delta \ ve \ |y-b| < \delta \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \sqrt{2}\delta$$

olur.

Tanım 2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için, $\exists\delta > 0$ öyle ki $|x-a| < \delta$ ve $|y-b| < \delta$ bağıntılarını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x,y) noktaları için $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ dur.

İki değişkenli fonksiyonlarda bir fonksiyonun (a,b) noktasındaki limiti araştırılırken:

1) (a, b) noktasının fonksiyonun tanım kümesinin bir yığılma noktası olduğuna,

2) L limiti varsa bu limit (x, y) noktasının (a, b) noktasına yaklaşım şeklinden bağımsız olduğuna dikkat etmek gerekir.

Örnek 1.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - 3y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 2}$$

limitini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - 3y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^3 - 3y^2 + 1}{\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 + 2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Örnek 2. $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2}$ fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasında limitinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $y = mx$ doğrusu boyunca yaklaşılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + (mx)^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 + m^2)}{x^2} = 1 + m^2 \end{aligned}$$

olup her bir m değeri için farklı limit bulunur. Dolayısıyla $(0, 0)$ noktasında limit yoktur.

Teorem 1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L_1$ ve $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = L_2$ limitleri var olsun.

a) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$,

b) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x, y)g(x, y)] = L_1 L_2$,

c) Her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = cL_1$,,

d) $g(x,y) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Tanım 3. f, A kümesinde tanımlı bir fonksiyon ve (a,b), A kümesinin bir yığılma noktası olsun. f, (a,b) de tanımlı ve $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ise f fonksiyonu (a,b) de süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise A üzerinde süreklidir denir.

O halde bir fonksiyonun bir (a,b) noktasında sürekli olması için

1) f, (a,b) noktasında tanımlı,

2) f, (a,b) de limitli,

3) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

olmalıdır.

Örnek 3. $f(x,y) = 2x^3 + xy + 3y^2$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasında sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} 2x^3 + xy + 3y^2 = 6 = f(1,1)$ olduğundan f, $(1,1)$ noktasında süreklidir.

Örnek 4.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(0,0)$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ seçelim. $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ ve $|y| < \sqrt{\varepsilon}$ eşitsizliklerini sağlayan (x,y) noktaları için

$$|f(x,y)-0| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = x^2\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq x^2 < \varepsilon$$

olduğundan

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

elde edilir. Bu da verilen fonksiyonun $(0,0)$ sürekli olduğunu gösterir.