13. İKİ KATLI İNTEGRALLERİN HESABI

Teorem 1. **(Birinci Fubini Teoremi):** $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ ve $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde

$$\iint\limits_B f(x,y)\, dA = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

olur.

Örnek 1. $B = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 4\}$ bölgesi üzerinde $f(x, y) = 2xy^3$ fonksiyonunun iki katlı integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B f(x,y)\, dA &= \int\limits_0^4 \int\limits_1^3 2xy^3 dx dy \\
&= \int\limits_0^4 \left(\int\limits_1^3 2xy^3 dx \right) dy \\
&= \int\limits_0^4 \left(x^2 y^3 \right) \Big|_1^3 \, dy \\
&= \int\limits_0^4 \left(9y^3 - y^3 \right) dy \\
&= \int\limits_0^4 8y^2 dy \\
&= 512
\end{aligned}$$

olur. İntegrasyon sırasını değiştirirsek; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\iint_B f(x,y)\,dA &= \int_1^3\int_0^4 2xy^3 dydx \\
&= \int_1^3 \left(\int_0^4 2xy^3 dy\right) dx \\
&= \int_1^3 \frac{1}{2}xy^4 \mid_0^4 dx \\
&= \int_1^3 128x dx \\
&= 512
\end{aligned}$$

olur. İntegrasyon sırası değiştirilirse; yani önce y, sonra x değişkenine göre integral alınırsa sonuç değişmez. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\iint_B f(x,y)\,dA &= \int_1^3\int_0^4 2xy^3 dydx \\
&= \int_1^3 \left(\int_0^4 2xy^3 dy\right) dx \\
&= \int_1^3 \frac{1}{2}xy^4 \mid_0^4 dx \\
&= \int_1^3 128x dx \\
&= 512
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2. (İkinci Fubini Teoremi): $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli, $\forall\ x \in [a,b]$ için $u(x) \leq v(x)$ ve $B = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq v(x)\}$ olsun. $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy\right) dx$$

sağlanır.

Örnek 2. $B=\{(x,y): 0\leq x\leq 3,\ -2x\leq y\leq x^2+1\}$ bölgesi üzerinde

$$\iint\limits_B \frac{2y}{(x+1)^2}dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_B \frac{2y}{(x+1)^2}dA &= \int_0^3\int_{-2x}^{x^2+1} \frac{2y}{(x+1)^2}dydx \\
&= \int_0^3 \frac{y^2}{(x+1)^2}\ \Big|_{-2x}^{x^2+1}\ dx \\
&= \int_0^3 \frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x+1)^2}dx \\
&= \int_0^3 (x-1)^2\,dx \\
&= 3
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3. Aşağıdaki iki katlı integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (4-x-y)\,dydx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx$ **c)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^x (x+y)\,dydx$ **d)** $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 x^2e^{xy}dxdy$

Çözüm. a)

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_0^1 (4-x-y)\,dydx &= \int_0^2 \left(4y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1\,dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{7}{2}-x\right)dx \\
&= \frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \\
&= 5
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dydx &= \int_0^1 x^2 \arctan y\,\Big|_0^1\,dx \\
&= \int_0^1 x^2\left(\arctan 1 - \arctan 0\right)dx \\
&= \int_0^1 x^2\frac{\pi}{4}dx \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^x (x+y)\,dydx &= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^x\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2dx \\
&= \frac{1}{2}x^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_y^1 x^2 e^{xy}\,dxdy &= \int_0^1\int_0^x x^2 e^{xy}\,dydx \\
&= \int_0^1 xe^{xy}\mid_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(xe^{x^2}-x\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mid_0^1 \\
&= \frac{e}{2}-1
\end{aligned}$$

İKİ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

Bölge dönüşümleri bölümünde belirtildiği gibi, $uv-$ düzlemindeki bir D bölgesi

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla $xy-$ düzlemindeki bir B bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürülmüş olsun.

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(g(u,v),h(u,v))\,|J|\,dudv$$

eşitliği ile verilir. Eğer özel olarak

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

alınarak kutupsal koordinatlarına geçilirse

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r dr d\theta$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

olarak bulunur.

Eğer $D = \{(r,\theta) : s(\theta) \le r \le t(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ ise

$$\iint\limits_{B} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{s(\theta)}^{t(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r dr d\theta$$

olur.

Örnek 4. B bölgesi, köşeleri $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$ olan paralelkenar olduğuna göre

$$\iint\limits_{B} (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy$$

integralini

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x+y &= 3\pi \to v = \pi \\ x+y &= \pi \to v = \pi \\ y &= x+\pi \to u = -\pi,\ y = x-\pi \to u = \pi \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

olup

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{B} (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_{D} u^2 \sin^2 v \frac{1}{2} dudv \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin^2 v dudv \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{3\pi} \frac{u^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} \sin^2 v dv \\
&= \frac{\pi^3}{3}\int\limits_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2v)\,dv \\
&= \frac{\pi^3}{6}\left(v - \frac{1}{2}\sin 2v\right) \Big|_{\pi}^{3\pi} = \frac{\pi^4}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5. B bölgesi, $5x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgedir.

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = -2u + v \end{cases}$$

dönüşümü yardımıyla

$$I = \iint\limits_{B} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2} dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$x = u + v$$
$$y = -2u + v$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 5\left(u+v\right)^2 + 2\left(u+v\right)\left(-2u+v\right) + 2\left(-2u+v\right)^2 &= 1 \\ 9\left(u^2+v^2\right) &= 1 \end{aligned}$$

ise

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{9}$$

çemberi elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

olup

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{B} \sqrt{5x^2 + 2xy + 2y^2}dA \\ &= \iint\limits_{D} \sqrt{9\left(u^2+v^2\right)}3dudv \\ &= 9\iint\limits_{D} \sqrt{u^2+v^2}dudv \end{aligned}$$

integrali elde edilir. Kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\begin{aligned} I &= 9\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} r.rdrd\theta \\ &= 9\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{3}} d\theta \\ &= 3\left(\frac{1}{27}\right)2\pi \\ &= \frac{2\pi}{9} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 6. B bölgesi, $x^2 + y^2 = 1$ ile $x^2 + y^2 = 16$ çemberleri tarafından sınırlanan bölgedir.

$$I = \iint\limits_B \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{4}} dA$$

integralini, kutupsal koordinatlar yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

ve

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \iint\limits_B \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{4}} dxdy &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4 \left(r^2\right)^{\frac{1}{4}} r dr d\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^4 r^{\frac{3}{2}} dr d\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 \, d\theta \\ &= \frac{2}{5}(32 - 1)\, 2\pi \\ &= \frac{124}{5}\pi \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki integrallerin integrasyon bölgesini çiziniz, integrasyon sırasını değiştiriniz ve integrali hesaplayınız.

a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dxdy$ **b)** $\int_0^2 \int_1^{e^x} dxdy$ **c)** $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xdxdy$

2. $\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{\sqrt{y}}^{9-4x^2} 16xdydx = 81$ olduğunu gösteriniz.

3. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} ydydx = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.