Süreklilik

Tanım 2.26.

1. *f fonksiyonu x_0 sayısını kapsayan bir (a, b) açık aralığında tanımlı olsun. Eğer $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ise, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir, denir.*

2. *f fonksiyonu bir $(a, x_0\ )$ açık aralığında tanımlı olsun. Eğer $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ise, f fonksiyonu x_0 noktasında soldan süreklidir, denir.*

3. *f fonksiyonu bir (x_0, b) açık aralığında tanımlı olsun. Eğer $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ise, f fonksiyonu x_0 noktasında sağdan süreklidir, denir.*

Tanım 2.26 dikkate alınırsa, *bir f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, x_0 noktasında sağdan ve soldan sürekli olmasıdır, yani*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \lim_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$$

olmasıdır.

Eğer bir f fonksiyonu bir x_0 noktasında sürekli değilse, *f fonksiyonu x_0 noktasında süreksizdir,* denir.

Tanım 2.27. *f fonksiyonu bir (a, b) açık aralığının her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu (a, b) açık aralığı üzerinde süreklidir, denir. Eğer, f (a, b) üzerinde sürekli ve*

* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *ise f $[a, b)$ üzerinde süreklidir,*

* $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *ise f $(a, b]$ üzerinde süreklidir,*

* $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *ve* $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *ise f $[a, b]$ üzerinde süreklidir,*

denir.

Bir f fonksiyonu bir $S \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu S üzerinde süreklidir, denir.

Teorem 2.28. *f ve g fonksiyonları x_0 noktasında sürekli ise, $f+g,\ f-g,\ f.g$ ve $g(x_0) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ x_0 noktasında süreklidir.*

Teorem 2.29. *f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x_0)$ noktasında sürekli ise $f \circ g$ bileşke fonksiyonu da x_0 da süreklidir.*

Teorem 2.30. *fonksiyonu bir L noktasında süürekli ve $\lim_{x\to x_0}(x) = L$ ise,*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) = g(L)$$

gerçeklenir.

Tanım 2.31. *Eğer*

1. *her $x_0 \in [a,b)$ için $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ var,*
2. *her $x_0 \in (a,b]$ için $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ var,*
3. *Sonlu sayıdakiler hariç, (a,b) aralığındaki tüm x_0 noktaları için $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*

ise, f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde parçalı süreklidir, denir. Ayrıca, eğer (a,b) aralığındaki bir x_0 noktasında 3. durum sağlanmazsa f fonksiyonu x_0 noktasında bir süreksizliğe sahiptir, denir. Eğer $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$ veya $\lim_{x\to b^-} f(x) \neq f(b)$ *ise f, sırasıyla a ve b uç noktalarında sıçramaya sahiptir.*

Örnek 2.32. *$f(x) = sgn(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sıçrama süreksizliğe sahiptir.*

Tanım 2.33. *f fonksiyonu x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve x_0 noktasında süreksiz (tanımsız da olabilir) olsun. Eğer* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ limiti varsa, f fonksiyonu *x_0 noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir, denir. Bu durumda,*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \text{ ve } x\ f \text{ nin tanım kümesinde ise} \\ \lim_{x\to x_0} f(x), & x = x_0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon x_0 noktasında sürekli olur.

Örnek 2.34. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *fonksiyonu her* $x \neq 0$ *noktasında sürekli ve* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *olduğundan*

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon $x = 0$ *noktasında sürekli olur.*

Tanım 2.34. *Eğer* $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ *durumlarından en az birisi gerçeklenirse,* f *fonksiyonu* x_0 *noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir, denir.*