Kısmi Türevler

Tanım 1. $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$ bir fonksiyon ve $(a,b) \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

limiti varsa bu limite f nin x değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi denir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \frac{\partial f}{\partial x}|(a,b), \quad f_x(a,b)$$

sembollerinden biriyle gösterilir. Benzer şekilde

$$\lim_{h\to 0} \frac{(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

limiti varsa bu limite f nin y değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi denir.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}|(a,b), \quad f_y(a,b)$$

sembollerinden biriyle gösterilir.

Örnek 1. $f(x,y) = 3x^2y + x^2 - y^3$ için $f_x(2,1)$ ve $f_y(2,1)$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned} f_x(2,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,1) - f(2,1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2 + 16h}{h} = \lim_{h\to 0}(16+4h) = 16, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(2,1) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(2,1+k) - f(2,1)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{9k - 3k^2 - 3k^3}{k} = \lim_{k\to 0}(9 - 3k - 3k^2) = 9 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2. $f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonunun kısmi türevini hesaplayınız.

Çözüm.

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{x}{x^2+y^2}$$

ve benzer şekilde

$$f_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

bulunur.

Yüksek Mertebeden Kısmi Türevler

f fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevlerinin de x ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri var ise bu türevlere f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri denir. Buna göre f nin ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

şeklindedir.

Teorem 1. Eğer f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} türevleri (a,b) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlı ve (a,b) noktasında sürekli iseler

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

dir.

Örnek 1. $f(x,y) = e^{-2x}cosy$ fonksiyonunun f_{xy} ve f_{yx} türevlerini hesaplayıp eşit olduklarını gösteriniz.

Çözüm.

$$f_x(x,y) = -2xe^{-2x}cosy \Rightarrow f_{xy}(x,y) = 2e^{-2x}siny$$
$$f_y(x,y) = -2xe^{-2x}siny \Rightarrow f_{yx}(x,y) = 2e^{-2x}siny$$

olup buradan $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ elde edilir.

Örnek 2. $z = ln(x^2+y^2)$ fonksiyonunun Laplace denklemi denilen $z_{xx} + z_{yy} = 0$ denklemini sağladığını gösteriniz.

Çözüm.

$$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, z_y = \frac{2y}{x^2+y^2},$$
$$z_{xx} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}, z_{yy} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

olup buradan

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

elde edilir.

Zincir Kuralı

Teorem 1. $z = f(x,y)$ şeklinde tanımlanan $f : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f, f_x, f_y fonksiyonları B üzerinde sürekli ve $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ fonksiyonlarının u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri varsa $z = f(g(u,v), h(u,v))$ fonksiyonunun da u ile v değişkenlerine göre kısmi türevleri vardır ve

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

dir.

Örnek 1. $u = x^2y^3z$ ve $x = t^2$, $y = t$, $z = cost$ olduğuna göre $\frac{du}{dt}$ türevini bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ve

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z, \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y^3, \frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 1, \frac{dz}{dt} = -sint\right]$$

olup buradan

$$\frac{du}{dt} = 4t^4cost + 3t^6cost - t^5sint$$

elde edilir.

Kapalı Olarak Tanımlanan Fonksiyonların Türevi

Tanım 1. $f : x \to f(x)$ veya $y = f(x)$ biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonuna bir açık fonksiyon, $F(x,y) = 0$ biçimindeki bir bağıntıyla tanımlanan fonksiyona da kapalı fonksiyon denir.

$F(x,y,z) = 0$ bağıntısı bir $z = f(x,y)$ fonksiyonu tanımlamış olsun. F_x ve F_y kısmi türevleri sürekli ve $F_z \neq 0$ olsun. Zincir kuralından

$$\frac{\partial F}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

yazılabilir. $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ olacağından

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde y değişkenine göre türev alarak,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

olduğu gösterilebilir.

Örnek 1. $z^3 + xyz + xy^2 - 1 = 0$ bağıntısıyla kapalı biçimde tanımlanan $z = f(x, y)$ fonksiyonunun $(1, 2, 1)$ noktasındaki kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm.

$$F = z^3 + xyz + xy^2 - 1,$$

$$F_x = yz + y^2, F_y = xz + 2xy, F_z = 3z^2 + xy$$

olup buradan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{yz + y^2}{3z^2 + xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,2,1)} = -\frac{6}{5}$$

ve

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{xz + 2xy}{3z^2 + xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}|_{(1,2,1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

bulunur.

Maksimum ve Minimumlar

Tanım 1. $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$K(\varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} < \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2$$

kümesine (p, q) noktasının ε komşuluğu denir.

Tanım 2. $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $(a, b) \in A$ olsun. Her $(x, y) \in K_1(\varepsilon)$ için

$$f(x, y) \leq f(a, b)$$

olacak şekilde (a, b) noktasının bir $K_1(\varepsilon)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu (a, b) noktasında bir yerel (lokal) maksimuma sahiptir denir. $f(a, b)$ sayısına da f fonksiyonunun bir yerel maksiumum değeri denir.

$(c, d) \in A$ olsun. Her $(x, y) \in K_2(\varepsilon)$ için

$$f(x, y) \geq f(c, d)$$

olacak şekilde (a, b) noktasının bir $K_1(\varepsilon)$ komşuluğu varsa f fonksiyonu (a, b) noktasında bir yerel (lokal) minimuma sahiptir denir. $f(c, d)$ sayısına da f fonksiyonunun bir yerel minimum değeri denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun yerel ekstremum noktaları denir.

Eğer bir (m, n) noktasının her komşuluğunda $f(x_1, y_1) \leq f(m, n)$ olacak şekilde (x_1, y_1) ve $f(x_2, y_2) \geq f(m, n)$ olacak şekilde
(x_2, y_2) noktası varsa (m, n) noktasına bir eyer noktası denir.

$(p, q) \in A$ olsun. Her $(x, y) \in A$ için $f(x, y) \leq f(p, q)$ ise f fonksiyonu (p, q) noktasında mutlak maksimuma, $(r, s) \in A$ ve her $(x, y) \in A$ için $f(x, y) \geq f(r, s)$ ise f fonksiyonu (r, s) noktasında mutlak minimuma sahiptir denir.

Teorem 1. $z = f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

olsun.

(1) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$ ise (a, b) eyer noktasıdır.

(2) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ ve $f_{xx}(a, b) > 0$ ise (a, b) noktası yerel minimum noktasıdır.

(3) $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$ ve $f_{xx}(a, b) < 0$ ise (a, b) noktası yerel maksimum noktasıdır.

Örnek 1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm. $f_x = 2x + y - 2$, $f_y = x + 2y - 3$ olup buradan $2x + y - 2 = 0$ ve $x + 2y - 3 = 0$ eşitliklerini sağlayan $P = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ noktası kritik noktadır.

$f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})f_{yy}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) - f_{xy}^2(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) = 4 - 1 = 3 > 0$ elde edilir. Böylece $f_{xx}(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) = 2 > 0$ olduğundan $P = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

Örnek 2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi üzerinde $P(1, 2, 0)$ noktasına en yakın olan Q noktasının koordinatlarını bulunuz. p noktasının koniye olan uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm. Q noktasının koordinatlarına x, y, z diyelim. Q noktası koni üzerinde olduğundan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ olup $Q(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ ile $P(1, 2, 0)$ noktası arasındaki uzaklığın minimum olması gerekmektedir. Bu uzaklık

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2}$$

şeklindedir. Bu ifadenin minimum olması için

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2$$

ifadesinin minimum olması gerekir.

$$(1) f_x(x,y) = 2(x-1) + 2x = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0$$

ve

$$(2) f_y(x,y) = 2(y-2) + 2y = 0 \Rightarrow\Rightarrow 4y - 4 = 0$$

ve böylece $(x,y) = (\frac{1}{2}, 1)$ elde edilir. O halde Q noktasının koordinatları $Q(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}}{2})$ olacaktır. Bu durumda $P(1,2,0)$ noktasının koniye olan uzaklığı

$$d = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1)^2 + (1-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

birim bulunur.