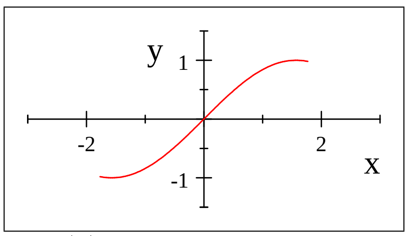
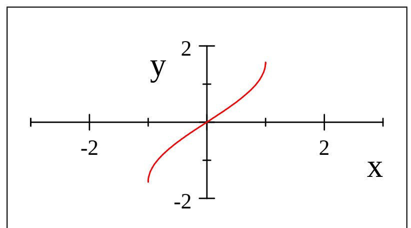
2.4.3 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Önceki kesimde belirtilen bütün trigonometrik fonksiyonlar peryodik olduklarından görüntü kümesindeki her değeri sonsuz noktada alırlar. Böylece trigonometrik fonksiyonlar birebir değildirler ve dolayısıyla ters fonksiyona sahip olmazlar. Ancak trigonometrik fonksiyonlar birebir olacak şekilde belli bir aralığa kısıtlanırsa ters fonksyonlarından bahsedilebilir. Önce sinüs fonksiyonu ile başlayalım.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlanır ve değer kümesi olarak $[-1, 1]$ alınırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir ve arcsin veya $\sin^{-1}$ ile gösterilir. f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan bu ters fonksiyonun grafiğide çizilebilir. Ters foksiyonun tanım kümesi $[-1, 1]$ aralığı ve görüntü kümesi ise $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığıdır.



$f(x) = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$



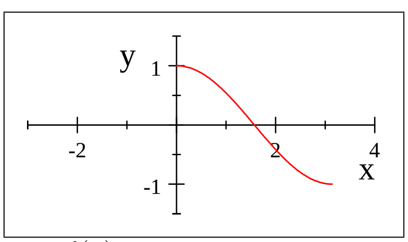
$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x),\ -1 \leq x \leq 1$

Bu açıklamalara göre $y = \arcsin x$ ifadesinde $x \in [-1, 1]$ ve $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ olmalıdır.

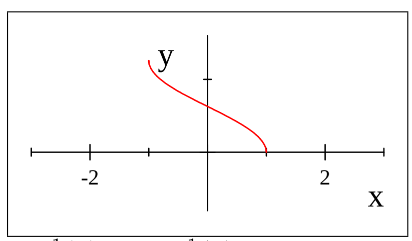
Örnek 41 $\arcsin \frac{1}{2}$ *ve* $\sin^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ *ifadelerini hesaplayınız.*

Örnek 42 $\cos(\arcsin x)$ *ifadesini sadeleştiriniz.*

$f(x) = \cos x$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığına kısıtlanır ve değer kümesi olarak $[-1, 1]$ alınırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur. Bu fonksiyonun tersine arkkosinüs fonksiyonu denir ve arccos veya $\cos^{-1}$ ile gösterilir. Ters foksiyonun tanım kümesi $[-1, 1]$ aralığı ve görüntü kümesi ise $[0, \pi]$ aralığıdır.



$f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$



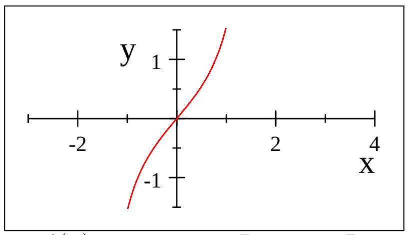
$f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x),\ -1 \leq x \leq 1$

Bu açıklamalara göre $y = \arccos x$ ifadesinde $x \in [-1, 1]$ ve $y \in [0, \pi]$ olmalıdır.

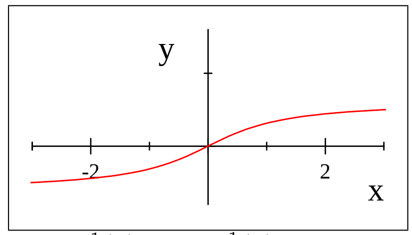
Örnek 43 $\arccos 1$ *ve* $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ *ifadelerini hesaplayınız.*

Örnek 44 $\arccos x + \arccos t = \arccos(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)})$ *eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.*

$f(x) = \tan x$ fonksiyonu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığına kısıtlanırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur. Bu fonksiyonun tersine arktanjant fonksiyonu denir ve arctan veya $\tan^{-1}$ ile gösterilir. Ters foksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi ise $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığıdır.



$f(x) = \tan x, \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x), \ x \in \mathbb{R}$

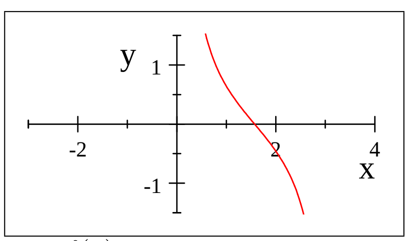
Bu açıklamalara göre $y = \arctan x$ ifadesinde $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ olmalıdır.

Örnek 45 $\arctan(-\sqrt{3})$ *ve* $\tan^{-1} 1$ *ifadelerini hesaplayınız.*

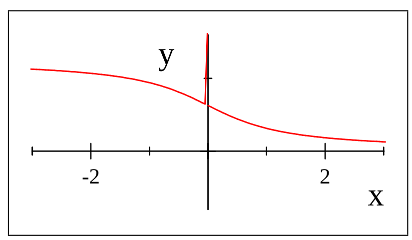
Örnek 46 $\sec^2(\arctan x)$ *ifadesini sadeleştiriniz.*

Örnek 47 $\tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ *ve* $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ *eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.*

$f(x) = \cot x$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığına kısıtlanırsa bu fonksiyon birebir ve örten olur. Bu fonksiyonun tersine arkkotanjant fonksiyonu denir ve arccot veya $\cot^{-1}$ ile gösterilir. Ters foksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi ise $(0, \pi)$ aralığıdır.



$f(x) = \cot x, \ 0 < x < \pi$



$f^{-1}(x) = \cot^{-1}(x), \ x \in \mathbb{R}$

Bu açıklamalara göre $y = \operatorname{arccot} x$ ifadesinde $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in (0, \pi)$ olmalıdır.

Örnek 48 $\operatorname{arccot} \sqrt{3}$ *ve* $\cot^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ *ifadelerini hesaplayınız.*

Benzer düşüncelerle $f(x) = \sec x$ fonksiyonu $[0, \pi] \backslash \{\frac{\pi}{2}\}$ kümesine kısıtlanır ve değer kümesi olarak $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$ alınırsa birebir örten olur. Bunun ters fonksiyonuna arcsekant fonksiyonu denir ve arcsec veya $\sec^{-1}$ ile gösterilir. Yine $f(x) = \csc x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \backslash \{0\}$ kümesine kısıtlanır ve değer kümesi olarak $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ alınırsa birebir örten olur. Bunun ters fonksiyonuna arckosekant fonksiyonu denir ve arccsc veya $\csc^{-1}$ ile gösterilir.

Örnek 49 $0 < x < 1$ *için* $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 50 $f(x) = \arcsin x$ *ve* $g(x) = \arctan x$ *fonksiyonlarının tek fonksiyon olduklarını gösteriniz.*

Örnek 51 $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ *olduğunu gösteriniz.*

Örnek 52 $f(x) = \arctan(\sin x)$ *fonksiyonu peryodik midir?*

Örnek 53 *Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.*

1. $f(x) = \arcsin \frac{x}{2}$
2. $g(x) = \arctan \frac{x-1}{x}$
3. $h(x) = \operatorname{arccot} \sqrt{x-1}$

Örnek 54 $\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

Örnek 55 $\tan(\arcsin \frac{1}{4})$ *ifadesinin değerini hesaplayınız.*

2.5 Üstel, Logaritmik ve Hiperbolik Fonksiyonlar

2.5.1 Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

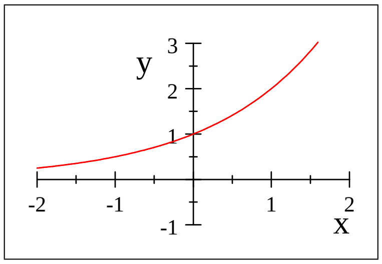
Matematik ve mühendislikte en sık kullanılan fonksiyon çeşitlerinden ikisi üstel ve logaritmik fonksiyonlardır. Bu kesimde bu fonksiyonları tanıtacak ve bazı temel özelliklerini inceleyeceğiz. Önceki kesimlerde $f(x) = x^2$ gibi (yani tabanı deişken x, kuvveti sabit 2 sayısı olan) fonksiyonları ele aldık. Burada ise tabanı 2 gibi sabit bir sayı ve üssü x gibi değişken olan $g(x) = 2^x$ gibi fonksiyonları göz önüne alacağız. Bilindiği gibi f ye bir kuvvet fonksiyonu denir. g ye ise bir üstel fonksiyon adını vereceğiz. Bu iki fonksiyon birbiri ile karıştırılmamalıdır.

Tanım 56 *a pozitif sayısı* 1 *den farklı bir sayı olmak üzere* $f(x) = a^x$ *biçiminde tanımlanan fonksiyona bir üstel fonksiyon adı verilir.*

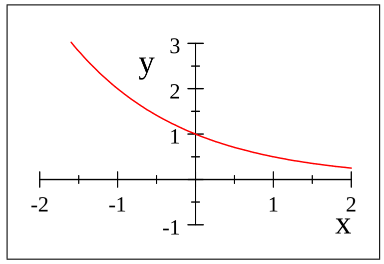
Örneğin $y = 2^x$, $y = 3^{-x}$, $y = 4^{\frac{x}{5}}$ birer üstel fonksiyondurlar ancak $y = (-3)^x$ üstel foksiyon değildir.

Üstel fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. Her x reel sayısı için $a^x > 0$ olacağından üstel fonksiyonların görüntü kümesi ise $(0, \infty)$ aralığıdır. Dolayısıyla üstel fonksiyonların grafiği daima x ekseninin üstündedir.

$f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu verilsin. Eğer $a > 1$ ise $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} < a^{x_2}$ olacağından f artan olur. Eğer $0 < a < 1$ ise $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} > a^{x_2}$ olacağından f azalan olur. Bu fonksiyonun grafiği a nın durumlarına göre aşağıda verilmiştir.



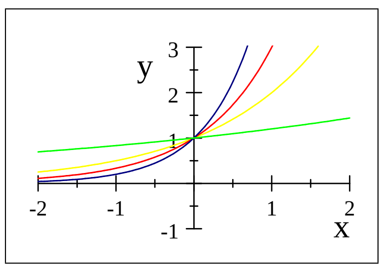
$a > 1$ için $y = a^x$



$0 < a < 1$ için $y = a^x$

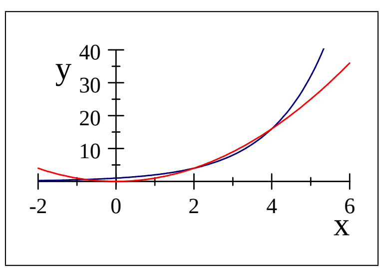
Bütün üstel fonksiyonlar y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser. x ekseni ise bu fonksiyonlar için asimptottur. Ayrıca üstel fonksiyonların birebir olduklarını görmek de kolaydır.

$a > 1$ için $y = a^x$ üstel fonksiyonlarının grafikleri benzer şekle sahip oldukları ve hatta $(0, 1)$ noktasından geçtikleri halde aralarında ince farklılıklar vardır. x artarken a büyüdükçe grafiğin eğimi de artar. Aşağıdaki şekilde $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ ve $y = (1.2)^x$ fonksiyonlarının grafikleri sırası ile sarı, kırmızı, mavi ve yeşil renklerde çizilmiştir.



Örnek 57 *$y = 3-2^x$ fonksiyonunu grafiğini çiziniz, tanım ve görüntü kümesini bulunuz.*

Örnek 58 *$f(x) = 2^x$ finksiyonu ile $g(x) = x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinar siteminde çizerek karşılaştırınız. x in büyük değerleri için hangi fonksiyon daha hızlı büyümektedir.*



Matematikte en sık duyulan irrasyonel sayıların başında $\pi = 3.14159\cdots$ sayısı gelmektedir. Kalkülüs ve uygulamalı matematikte ise yine bir irrasyonel sayı olan $e = 2.71828\cdots$ sayısı π sayısından çok daha önemli bir rol oynar. Klasik olarak e sayısı, x pozitif yönde sınırsız artarken $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ fonksiyonunun yaklaştığı sayı olarak tanımlanmaktadır. Şimdi e sayısı için farklı bir bakış açısı inceleyelim. Bilindiği gibi tüm üstel fonksiyonlar y eksenini $(0,1)$ noktasında kesmektedirler. Ancak $y = a^x$ üstel fonksiyonunun y eksenini kestiği bu noktadaki teğetlerinin eğimleri farklılık göstermektedir. Örneğin $y = 2^x$ in $(0,1)$ noktasındaki teğetinin eğimi $m \approx 0.7$ ve $y = 3^x$ in $(0,1)$ noktasındaki teğetinin eğimi ise $m \approx 1.1$ dir. Kalkülüsteki pek çok formülün $y = a^x$ in $(0,1)$ noktasındaki teğetinin eğiminin tam 1 olacak şekilde seçildiğinde çok basit olacağı görülmektedir. Bu özelliğe uygun bir sayı vardır ve bu e harfi ile gösterilmektedir. Buradan e sayısının 2 ile 3 arasında olduğu anlaşılmaktadır. Bu sayının ilk beş basamağı yukarıda verilmiştir.

e tabanında verilen üstel fonksiyona doğal üstel fonksiyon denilmektedir. $f(x) = e^x$ doğal üstel fonksiyonu bazen $f(x) = \exp(x)$ biçiminde de gösterilmektedir.

Örnek 59 *$f(x) = e^x$ in grafiğinden yararlanarak $g(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$, $h(x) = 3 - e^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz, tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.*

Tanım 60 *$f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ $f(x) = a^x$ üstel fonksüyonunun birebir ve örten olduğu bilinmektedir. Burada $a > 0$ ve $a \neq 1$ olması gerektiğine dikkat edilmelidir. Bu fonksiyon birebir ve örten olduğundan $f^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ tersi vardır. Bu ters fonsiyona a tabanına göre logaritma fonksiyonu adı verilir ve $\log_a$ ile gösterilir. Buna göre $\log_a x$ ifadesini tanımlı olması için $a > 0$, $a \neq 1$ ve $x > 0$ olması gerekir.*

Ters fonksiyon için

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

denkliğini kullanırsak

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \tag{5}$$

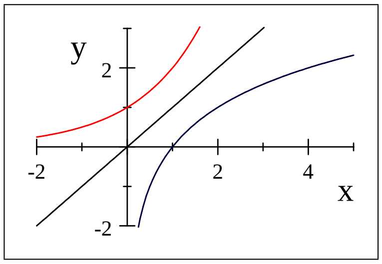
denkliğini elde ederiz. Örneğin $\log_2 32 = y \Leftrightarrow 32 = 2^y$ ifadesinden $y = 5$ bulunur. Yani $\log_2 32 = 5$ olur. Bu düşünce ile bazı sayıların logaritması hesaplanabilir.

f ve f^{-1} fonksiyonları ile ilgili $f^{-1}(f(x)) = x$ (burada x tanım kümesine ait) ve $f(f^{-1}(x)) = x$ (burada x görüntü kümesine ait) eşitlikleri göz önüne alındığında

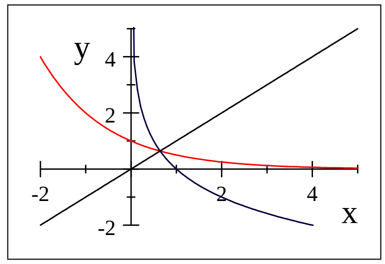
$$\log_a(a^x) = x,\ x \in \mathbb{R} \text{ ve } a^{\log_a x} = x,\ x > 0$$

eşitliklerinin varlığı elde edilebilir.

f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduklarından $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği a nın durumlarına göre kolayca çizilebilir. Tüm logaritma fonksiyonlarının grafiklerinin $(1,0)$ noktasından geçtiğine dikkat ediniz.



$a > 1$ için $y = \log_a x$



$0 < a < 1$ için $y = \log_a x$

Üstel fonksiyonun ilgili özellikleri ve (5) denkliği kullanılarak logaritma fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki özellikleri elde edebiliriz.

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a (\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a (x^r) = r \log_a x \ (r \in \mathbb{R})$

Örnek 61 $\log_2 80 - \log_2 5$ *ifadesinin değerini bulunuz.*

Üstel fonksiyonda olduğu gibi e sayısı tabanında verilen logaritma fonksiyonu ayrı bir öneme sahiptir. e tabanına göre verilen logaritma fonksiyonuna doğal logaritma denir ve özel bir gösterimi vardır. $\log_e x = \ln x$ ile gösterilir. Buradan

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

denkliğinin varlığı ile özel olarak $\ln e = 1$ olduğu görülmektedir. 10 tabanında yazılan logaritma için kıcasa $\log_{10}$ yerine sadece log yazılacaktır.

Örnek 62 $e^{5-3x} = 10$ *denklemini çözünüz.*

Örnek 63 $y = \ln x$ *fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak* $y = \ln |x|$, $y = \ln(\frac{1}{x})$, $y = \ln(x-2) - 1$ *fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.*

Örnek 64 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ *eşitliğinin varlığını gösteriniz. Buradan* $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ *eşitliği yazılabilir mi?*

Örnek 65 *Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.*

1. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

3. $f(x) = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$
4. $f(x) = \arcsin(\ln x)$
5. $f(x) = \log(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$
6. $f(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$

Örnek 66 *$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.*

Örnek 67 *Aşağıdaki fonksiyonların tersi için bir formül bulunuz.*

1. $y = \ln(x+3)$
2. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

Örnek 68 *$f(x) = \ln(4-x^2)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.*

Örnek 69 *Aşağıdaki denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.*

1. $\ln(\ln x) = 1$
2. $e^{2x+3} - 7 = 0$
3. $\ln x - \ln(x-1) = 1$
4. $\ln x > -1$
5. $e^{2-3x} > 4$

Örnek 70 *$f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+x})$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. x ve y tanım kümesine ait iken $f(\frac{x+y}{1+xy}) = f(x) + f(y)$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.*

2.5.2 Hiperbolik Fonksiyonlar ve Tersleri

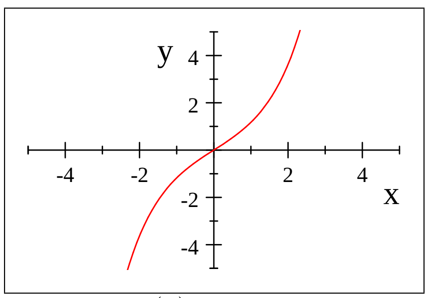
Kalkülüs ve uygulamalı matematikte e^x ve e^{-x} fonksiyonlarının bazı işlemlerle bir araya getirilmesinden oluşan fonksiyonlara çok sık rastlanılmaktadır. Bunların en önemlileri hiperbolik fonksiyonlardır. Temel hiperbolik fonksiyonlar $y = e^x$ doğal üstel fonksiyonunun tek ve çift parçaları olarak tanımlanmaktadır. Bilindiği gibi, simetrik bir küme üzerinde tanımlı her f fonksiyonu için

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{Çift Parça}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{Tek Parça}}$$

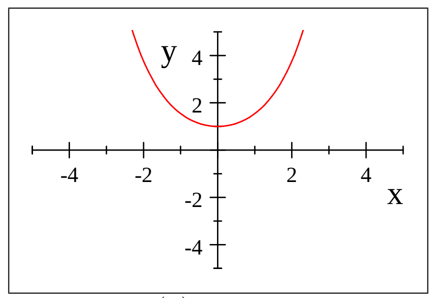
eşitliği yazılabildiğinden, böyle bir fonksiyon daima biri tek biri çift olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir. Buradan hareketle $f(x) = e^x$ fonksiyonunun tek parçası olan $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik sinüs fonksiyonu denir ve $\sinh x$ ile gösterilir. Yine $f(x) = e^x$ fonksiyonunun çift parçası olan $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik kosinüs fonksiyonu denir ve $\cosh x$ ile gösterilir. Yani

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{ve} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{6}$$

olur. Buna göre $y = \sinh x$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir. $y = \cosh x$ fonksiyonunun ise tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[1, \infty)$ aralığıdır. (6) eşitliklerinden $\sinh 0 = 0$ ve $\cosh 0 = 1$ olduğu görülebilir. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda çizilmiştir.



$g(x) = \sinh x$



$h(x) = \cosh x$

Trigonometrik fonksiyonlarda olduğu gibi $\sinh x$ ve $\cosh x$ e bağlı olarak yeni hiperbolik fonksiyonlar tanımlanmıştır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ (Tanım kümesi } \mathbb{R}\text{, görüntü kümesi } (-1,1))\\
\coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ (Tanım kümesi } \mathbb{R}\backslash\{0\}\text{, görüntü kümesi } \mathbb{R}\backslash[-1,1])\\
\sec hx &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \text{ (Tanım kümesi } \mathbb{R}\text{, görüntü kümesi } (0,1])\\
\csc hx &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \text{ (Tanım kümesi } \mathbb{R}\backslash\{0\}\text{, görüntü kümesi } \mathbb{R}\backslash\{0\})
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Hiperbolik fonksiyonlar periyodik olmamalarına rağmen trigonometrik fonksiyonlarda olduğu gibi pek çok özdeşliğe sahiptirler. $y = \sinh x$ in tek fonksiyon, $y = \cosh x$ in çift fonksiyon olduklarının göz önüne alınması ve yukarıdaki eşitliklerin kullanılmasıyla hiperbolik fonksiyonlarla ilgili özdeşilikleri elde edebiliriz. Örneğin

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

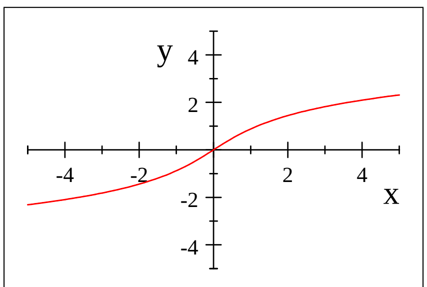
olur. Yine

$$\begin{aligned}\cosh(x+y) &= \cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y\\ 1-\tanh^2 x &= \sec h^2 x\\ \cosh 2x &= \cosh^2 x+\sinh^2 x\\ \sinh 2x &= 2\sinh x\cosh x\end{aligned}$$

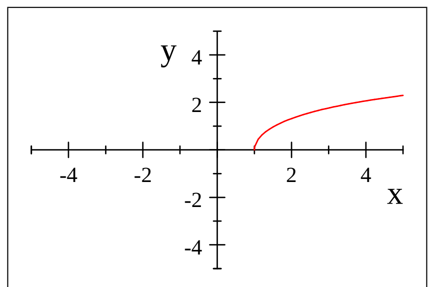
eşitlikleri ve daha fazlası elde edilebilir.

$y=\sinh x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye birebir ve örten bir fonksiyon olduğundan ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyon $\arcsin h$ veya $\sinh^{-1}$ ile gösterilir. $y=\cosh x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde birebir değildir. Ancak $[0,\infty)$ aralığına kısıtlanır ve değer kümesi olarak $[1,\infty)$ alınırsa birebir örten olur. Bunun ters fonksiyonu ise $\arccos h$ veya $\cosh^{-1}$ ile gösterilir. Diğer hiperbolik fonksiyonlarında uygun aralıklara kısıtlanarak terslerinden bahsedilebilir.

$y=\sinh^{-1}x$ ve $y=\cosh^{-1}x$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



$y=\sinh^{-1}x$



$y=\cosh^{-1}x$

Hiperbolik fonksiyonlar doğal üstel fonksiyonlar cinsinden yazıldığından ters hiperbolik fonksiyonlarda doğal logaritma fonksiyonu cinsinden yazılabilir.

$$\begin{array}{ccc} f(x)=e^x & \rightarrow & f^{-1}(x)=\ln x\\ \downarrow & & \downarrow\\ \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} & \rightarrow & \sinh^{-1}x=?\end{array}$$

Örneğin $y=\sinh^{-1}x$ ifadesi $x=\sinh y$ ye denk olduğundan $x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$ veya $e^{2y}-2xe^y-1=0$ yazılabilir. Buradan $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$ ($e^y>0$ ve $x-\sqrt{x^2+1}<0$ olduğundan $e^y\neq x-\sqrt{x^2+1}$ olduğu göz önüne alınmalıdır.) bulunur. Böylece $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ elde edilir. Yani

$$\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x\in\mathbb{R}$$

olur. Benzer düşünce ile

$$\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ x\geq 1$$

olduğu gösterilebilir.