Maksimum-Minimum Problemleri

Bu kesimde daha önce geliştirdiğimiz yöntemleri bazı optimizasyon peoblemlerinde nasıl kullanacağımızı göreceğiz. Optimizasyon problemleri çözülürken şu yolu izlemede yarar vardır. İlk olarak verilenler değişkenlerle gösterilir, maksimumu veya minimumu istenen çokluk bu değişkenlerle ifade edilir, verilenler kullanılarak tek değişkenli bir fonksiyon bulunur, fonksiyondaki bağımsız değişkenin sınırarı tespit edilir, son olarak yukarıda verilen yöntemler kullanılarak fonksiyonun mutlak ektremum değeri hesaplanır.

Örnek *$P(\frac{5}{2}, 0)$ noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını bulunuz.*

Çözüm *İstenen uzaklık, P noktası ile verilen eğrinin noktaları arasındaki uzaklıklarının en küçüğüdür. $A(x, \sqrt{x})$ verilen eğri üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere*

$$|AP| = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + x}$$

olur. Ozaman $d(x) = \sqrt{(x - \frac{5}{2})^2 + x}$ fonksiyounun $[0, \infty)$ üzerindeki en küçük değeri sorulmaktadır. Bunun için

$$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 + x$$

fonksiyounun $[0, \infty)$ üzerindeki en küçük değerini bulmak yeterlidir. Çünkü f yi en küçük yapan değer d yi de en küçük yapar.

$$f'(x) = 2x - 4$$

olup f nin $(0, \infty)$ aralığındaki tek yerel ekstremum noktası $x = 2$ dir ki bu nokta bir yerel minimum noktadır. Ozaman f nin $(0, \infty)$ üzerindeki en küçük değeri $f(2) = \frac{9}{4}$ dür. Ayrıca $f(0) = \frac{25}{4}$ olduğundan f nin $[0, \infty)$ üzerindeki en küçük değeri $\frac{9}{4}$ olur. Sonuç olarak istenen en küçük uzaklık $d(2) = \frac{3}{2}$ olur.

Örnek *Toplamları 40 olan iki pozitif tam sayının kareleri toplamı en fazlakaç olur.*

Çözüm *Bu tam sayılar x ve y olsun. Verilenlere göre $x+y = 40$ olmalıdır. x^2+y^2 ifadesinin en büyük değeri sorulmaktadır. $y = 40-x$ olduğundan $f(x) = x^2 + (40-x)^2$ fonksiyonunun $[1, 39]$ aralığındaki en büyük değeri bulunacaktır.*

$$f'(x) = 4x - 80$$

olduğundan $x = 20$ kritik noktadır. O zaman $f(20) = 400$, $f(1) = f(39) = 1521$ olduğundan istenen en büyük değer 1521 dir.

Örnek 16 *cm eninde* 30 *cm boyunda bir kartonun kö¸ selerinden eşit kareler kesilip üstü açık bir kutu yapılıyor. Karelerin kenarı ne olmalıdır ki, kutunun hacmi maksimum olsun?*

Çözüm *Karenin bir kenarı* x *olsun. O zaman yapılacak kutunun hacmi*

$$\begin{aligned} V(x) &= x(16-2x)(30-2x) \\ &= 480x - 92x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

olur. Burada x *uzunluğu temsil ettiğinden neğatif olamaz. Ayrıca dikdörtgenin eni* 16 *cm olduğundan* x *en fazla* 8 *cm olabilir. Dulayısıyla* V *nin* $[0,8]$ *üzerindeki en büyük değeri sorulmaktadır.*

$$V'(x) = 480 - 182x + 12x^2 = 0$$

$480 - 184x + 12x^2 = 0$ *ise* $x = \frac{10}{3}$ *veya* $x = 12$ *olur.* $x = 12$ *noktası* $[0,8]$ *aralığının dışındadır. O zaman* V *nin en büyük değeri ya uç noktalarda ya da kritik nokta olan* $\frac{10}{3}$ *tedir.* $V(0) = V(8) = 0$ *olduğundan hacim en fazla*

$$V(\frac{10}{3}) = \frac{19600}{27}\ cm^3$$

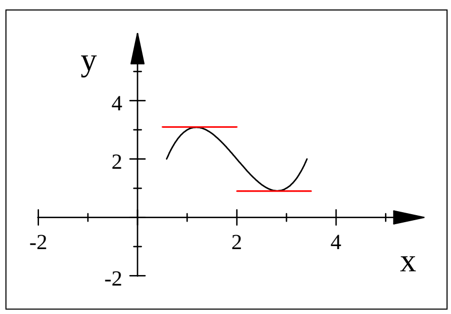
Türevle İlgili Teoremler

Bu kesimde kapalı bir aralık üzerinde sürekli, iç kısımda türevlenebilir fonksiyonların özellikleri ile ilgili bazı teoremler inceleyeceğiz. Bunların en önemlileri Rolle Teoremi ve Ortalama Değer Teoremidir.

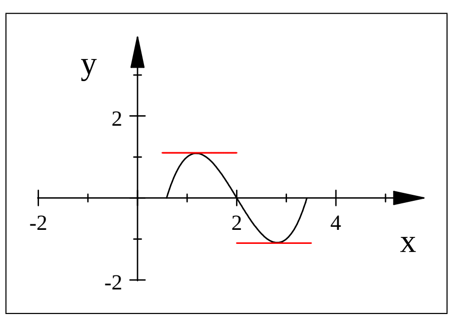
Teorem (Rolle Teoremi) *f fonksiyounu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.*

Ispat. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralık üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini alır. Bunlar sırası ile M ve m olsun. Eğer $M = m$ ise f sabit fonksiyon olur ki bu durumda her $c \in (a, b)$ için $f'(c) = 0$ olur. Şimdi $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan f fonksiyonu M ve m değerlerini uç noktalarda almaz. Kabul edelim ki m değerini (a, b) aralığındaki c noktasında alsın. O zaman c bir yerel minimum nokta olup bir kritik nokta olur. f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olduğundan c de de türevlenebilirdir. Böylece bu kritik nokta sadece türevin sıfır yaptığı yer olmalıdır. Yani $f'(c) = 0$ dır. ■

Sonuç 195 *f fonksiyounu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $y = f(x)$ eğrisinin en az bir noktasındaki teğeti yataydır.*



Sonuç 196 *Kapalı aralıkta sürekli ve iç kısımda türevlenebilir olan bir fonksiyonun iki sıfır yeri arasında türevin sıfır olduğu en az bir nokta vardır.*



Teorem 202 (Ortalama Değer Teoremi) *f fonksiyounu $[a, b]$ aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. O zaman (a, b) aralığında*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.