Bölüm 6

Kutupsal Koordinatlarda Alan ve Yay Uzunluğu Hesabı

Bu bölümde denklemleri kutupsal koordinat sisteminde verilen eğrilerle sınırlandırılmış bölgelerin alanlarını kartezyen koordinat sistemine geçmeden direkt olarak kutupsal koordinatlarda çalışarak hesaplamayı inceleyeceğiz. Ayrıca eğrilerin kutupsal koordinat sisteminde yay uzunluklarının hesaplanması üzerinde de duracağız.

6.1 Kutupsal Koordinatlarda Alan Hesabı

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\alpha)$ ile tanımlı f fonksiyonu sürekli olsun. Denklemi $r = f(\alpha)$ olan eğri, $\alpha = a$ ve $\alpha = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını A ile gösterelim. A alanına yaklaşmak için $[a, b]$ aralığının $\Delta\alpha = \dfrac{b-a}{n}$ eşit uzunluğundaki n tane alt aralığından oluşan $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = b$ parçalanmasını alalım. $i = 1, 2, \ldots, n$ için i. alt aralık olan $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ aralığında bir α_i^* noktası seçelim. Ayrıca $\alpha = \alpha_{i-1}$ ve $\alpha = \alpha_i$ doğruları ile $r = f(\alpha)$ eğrisi tarafından sınırlanan daire diliminin alanını ΔA_i ile gösterelim. $\Delta\alpha$ nın küçük değerleri için ΔA_i alanı $r_i^* = f(\alpha_i^*)$ yarıçaplı ve $\alpha = \alpha_{i-1}$ ile $\alpha = \alpha_i$ doğrularıyla sınırlı dairesel dilimin alanına yaklaşık olarak eşittir. Dolayısıyla

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2} r_i^{*2} \Delta\alpha = \frac{1}{2} f(\alpha_i^*)^2 \Delta\alpha$$

yazabiliriz. $i = 1, 2, \ldots, n$ için söz konusu dilimlerin alanlarını toplayarak

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(\alpha_i^*)^2 \Delta\alpha$$

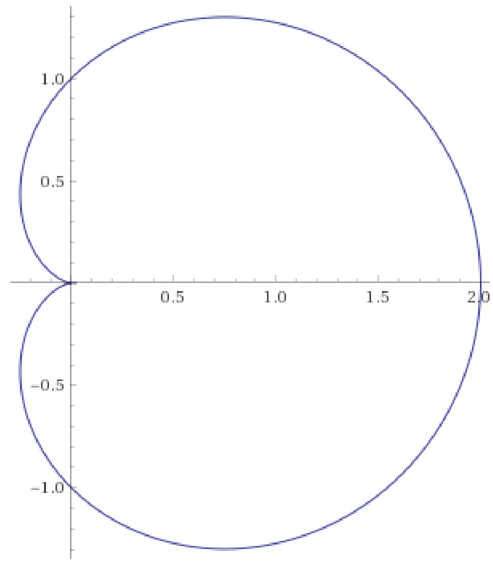
olur. Burada $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2} f(\alpha_i^*)^2 \Delta\alpha$ toplamı $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2} f(\alpha)^2 \, d\alpha$ integrali için bir Riemann toplamıdır. f fonksiyonu sürekli olduğundan bu integralin değeri $\Delta\alpha \to 0$ iken önceki toplamın limitidir.

Böylece

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} f(\alpha)^2 \, d\alpha$$

eşitliğini elde ederiz.

Örnek 6.1.1 Kutupsal koordinat sisteminde $r = 1 + \cos\alpha$ denklemi ile verilen eğrinin sınırladığı bölgenin alanını bulalım. Söz konusu alan aşağıdaki şekilde görülmektedir.



Hesaplanacak alanı A ile gösterirsek

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, d\alpha \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\alpha)^2 \, d\alpha \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) \, d\alpha \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}) \, d\alpha \\
&= \frac{1}{2} (\frac{3}{2}\alpha + 2\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin(2\alpha))\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

olarak bulunur. ▲

6.1.1 Kutupsal koordinatlarda eğriler arasındaki alan hesabı

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\alpha)$ ve $r = g(\alpha)$ ile tanımlı f ve g fonksiyonları sürekli olsun. Denklemleri sırasıyla $r = f(\alpha)$ ve $r = g(\alpha)$ olan eğriler, $\alpha = a$ ve $\alpha = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını A ile gösterelim. Ayrıca $a \leq \alpha \leq b$ için $g(\alpha) \leq f(\alpha)$ olduğunu kabul edelim. A alanını iç eğri ile sınırlı alanı, dış eğri ile sınırlı alandan çıkararak bulabiliriz. Böylece

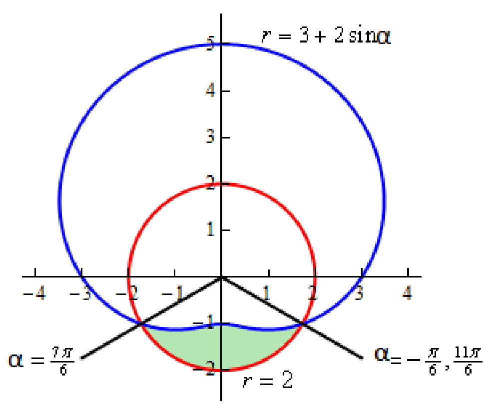
$$A = \int_a^b \frac{1}{2} f(\alpha)^2 \, d\alpha - \int_a^b \frac{1}{2} g(\alpha)^2 \, d\alpha$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \left(f(\alpha)^2 - g(\alpha)^2 \right) d\alpha$$

olur.

Örnek 6.1.2 Kutupsal koordinatlarda $r = 2$ çemberinin içinde ve $r = 3 + 2\sin\alpha$ eğrisinin dışında kalan bölgenin alanını bulalım. Bu alan aşağıdaki şekilde taralı olarak görülmektedir.



Söz konusu alanı A ile gösterelim. Öncelikle denklemleri verilen iki eğrinin kesim noktalarını belirleyelim. $3 + 2\sin\alpha = 2$ eşitliğinden $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ elde edilir. Bu sebeple $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ veya $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ olur. Alanı sınırlayan eğrilerden dışarıda olanı $r = 2$ ve içeride olanı $3 + 2\sin\alpha$ olduğundan

$$A = \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(2^2 - (3 + 2\sin\alpha)^2 \right) d\alpha$$

olur. Bu integral hesaplanırsa $A = \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3}$ bulunur. ▲

6.2 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu Hesabı

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\alpha)$ ile tanımlı f fonksiyonu sürekli olsun. Bu fonksiyonun parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha)\cos\alpha \\ y &= f(\alpha)\sin\alpha \end{aligned}$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= f'(\alpha)\cos\alpha - f(\alpha)\sin\alpha \\ \frac{dy}{d\alpha} &= f'(\alpha)\sin\alpha + f(\alpha)\cos\alpha \end{aligned}$$

olur. Böylece

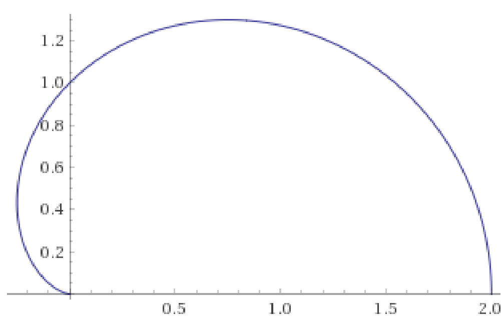
$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 = f(\alpha)^2 + f'(\alpha)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2$$

elde edilir. Eğer $r = f(\alpha)$ ile tanımlı f fonksiyonu için f' fonksiyonu bir $[a,b]$ aralığında sürekli ise bu aralıkta fonksiyonun grafiğinin uzunluğu

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha$$

dır.

Örnek 6.2.1 Kutupsal koordinatlarda $r = 1 + \cos\alpha$ ile tanımlı eğrinin $[0,\pi]$ aralığındaki yay uzunluğunu bulalım. Verilen fonksiyonun grafiğinin yay uzunluğu hesaplanacak kısmı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Bu durumda $\dfrac{dr}{d\alpha} = -\sin\alpha$ olup

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\, d\alpha \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\, d\alpha \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\alpha}\, d\alpha \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\alpha}\, d\alpha \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\, d\alpha \\
&= 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha \\
&= 4\sin\frac{\alpha}{2}\Big|_0^{\pi} \\
&= 4\sin\frac{\pi}{2} \\
&= 4
\end{aligned}$$

elde edilir. ▲