DİZİLER

Tanım 1. Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan bir fonksiyona *"dizi"* denir ve (a_n) biçiminde gösterilir. a_n sayısına dizinin n-yinci terimi yada genel terimi denir.

Örneğin $(a_n) = \left(\dfrac{n}{3^n}\right)$ dizisinin birkaç terimi $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{3}{27}, \dfrac{4}{81}, ...$ şeklindedir.

Tanım 2. (Aritmetik Dizi) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n = r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (a_n) dizisine *"aritmetik dizi"*, r sabitine de aritmetik dizinin ortak farkı denir.

Örnek 1. $(a_n) = (2n+1)$ dizisi ortak farkı $r = a_{n+1} - a_n = (2n+3) - (2n+1) = 2$ olan aritmetik bir dizidir.

Tanım 3. (Geometrik Dizi) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (a_n) dizisine *"geometrik dizi"*, r sabitine de geometrik dizinin ortak çarpanı denir.

Örnek 2. $(a_n) = (2.7^n)$ dizisi ortak çarpanı $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2.7^{n+1}}{2.7^n} = 7$ olan bir geometrik dizidir.

Tanım 4. (Dizinin yakınsaklığı) (a_n) bir dizi ve L sabit bir reel sayı olsun. Her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $n > N$ için $|a_n - L| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bir pozitif N tamsayısı varsa (a_n) dizisine L sayısına *"yakınsaktır"* denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ olarak gösterilir. (a_n) dizisi yakınsak olmadığında diziye *"ıraksaktır"* denir.

Örnek 3. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ dizisinin 0 sayısına yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm. $\varepsilon > 0$ verilsin. $|a_n - 0| < \varepsilon$ eşitsizliğinden $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon$ sağlanması için $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$ olmalıdır. Buradan, N sayısı $\frac{1}{\varepsilon^2} - 1$ ' e eşit yada daha büyük bir pozitif tamsayı seçilmelidir. $\varepsilon = \frac{1}{100}$ seçilirse $n > 9999$ olduğunda $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 0\right| < \frac{1}{100}$ sağlanır. Yani $N = 9999$ dur. Böylece, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4. $(a_n) = (1 + (-1)^n)$ dizisi ıraksaktır. Dizinin genel terimi $n \to \infty$ için sabit bir sayıya yaklaşmaz.

Teorem 1. (a_n) ve (b_n) yakınsak dizileri verilsin. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ olsun. Bu durumda

(i) k bir reel sayı olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = kL_1$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 L_2$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}, \quad (L_2 \neq 0)$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$

sağlanır.

Teorem 2. r sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $|r| < 1$ için (r^n) dizisi sıfıra yakınsaktır. $|r| > 1$ için ise bu dizi ıraksaktır.

Örnek 5. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ dizisi sıfıra yakınsayan bir dizidir.

Teorem 3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = L$ dir.

Teorem 4. (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ dir.

Teorem 5. (Sıkıştırma Teoremi) (a_n), (b_n) ve (c_n) dizileri arasında $a_n \leq b_n \leq c_n \quad (n > N)$ eşitsizliği sağlansın. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ dir.

Örnek 6. $(a_n) = \left(\dfrac{\sin^2 n}{3^n}\right)$ dizisi için her n için $0 \leq \dfrac{\sin^2 n}{3^n} \leq \dfrac{1}{3^n}$ sağlanır. $\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ dizisi 0' a yakınsayan bir dizi olup sıkıştırma teoreminden $\left(\dfrac{\sin^2 n}{3^n}\right)$ dizisi de 0 'a yakınsar.

Teorem 6. $(|a_n|)$ dizisi 0' a yakınsayan bir dizi ise (a_n) dizisi de 0' a yakınsaktır.

Örnek 7. $(a_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ dizisi verilsin. $(|a_n|) = \left(\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ dizisinin Örnek 3'den 0' a yakınsadığı görülür. Teorem 6'dan $(a_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ dizisi de 0' a yakınsar.

Tanım 5. (Monoton Dizi) Bir (a_n) dizisi için $n \geq 1$ için $a_{n+1} > a_n$ ise (a_n) dizisine artan, $a_{n+1} \geq a_n$ ise (a_n) dizisine azalmayan dizi denir. $n \geq 1$ için $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisine azalan, $a_{n+1} \leq a_n$ ise (a_n) dizisine artmayan dizi denir. Bu durumlardan herhangi birini sağlayan (a_n) dizisine monotondur denir.

Örnek 8. $(a_n) = \left(\dfrac{3n-2}{n+1}\right)$ dizisi için $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$$

sağlandığından (a_n) dizisi artandır.

Tanım 6. **(Sınırlı Dizi)** Verilen bir (a_n) dizisi için $n \geq 1$ için $a_n \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa (a_n) dizisine *"üstten sınırlı dizi"*, $a_n \geq k$ olacak şekilde bir k sayısı varsa (a_n) dizisine *"alttan sınırlı dizi"* denir. Hem alttan hem de üstten sınırlı dizilere *"sınırlı dizi"* denir.

Örnek 9. $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi sınırlı bir dizidir. Çünkü, her n için $0 < a_n = \dfrac{1}{n} \leq 1$ sağlanır.

Teorem 7. Sınırlı ve monoton bir dizi yakınsaktır.

Örnek 10. $(a_n) = \left(\dfrac{3n-2}{n+1}\right)$ dizisi Örnek 8'den monotondur. Diğer yandan, $n \geq 1$ için $\dfrac{3n-2}{n+1} < \dfrac{3n+3}{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{n+1} = 3$ olup $a_n < 3$ dür. Aynı zamanda $a_n = \dfrac{3n-2}{n+1} \geq \dfrac{1}{2}$ olup her n için $\dfrac{1}{2} \leq a_n < 3$ olduğundan dizi sınırlıdır. Dolayısıyla, (a_n) dizisi yakınsaktır.

SERİLER

Bir (a_k) dizisinin terimlerinin

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

toplamına bir sonsuz seri yada seri denilir ve bu toplam $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ile gösterilir. Burada a_k sayısına serinin genel terimi denir. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi için

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

formunda tanımlanan (S_n) dizisine kısmi toplamlar dizisi denir.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ifadesine de serinin n-yinci kısmi toplamı denir.

Tanım 1. Kısmi toplamlar dizisi yakınsak olan seriye yakınsaktır denir, yani

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ dir. Eğer $\lim_{n\to\infty} S_n$ mevcut değilse bu durumda seri ıraksaktır denir.

Örnek 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$ serisinin yakınsak olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm. Serinin genel terimi $a_k = \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$ formunda yazılabildiğinden serinin $n-$yinci kısmi toplamın

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + ... + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3}$$

olduğundan seri yakınsaktır ve serinin toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}$$

dür.

Tanım 2. (Geometrik seri) $a \neq 0$, a ve s reel sabitler olmak üzere

$$a + as + as^2 + ... + as^{n-1} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} as^{k-1}$$

formunda tanımlanan seriye *"geometrik seri"* denir.

Teorem 1. $\sum_{k=1}^{\infty} as^{k-1}$ geometrik serisi $|s| < 1$ için yakınsaktır ve toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} as^{k-1} = \frac{a}{1-s}$$

dir. Eğer $|s| \geq 1$ ise bu geometrik seri ıraksaktır.

Örnek 2. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$geometrik serisinde $a = 1,\ s = -\frac{3}{4}$ olup $|s| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{7}$$

dir.

Teorem 2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ise $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ dır. Eğer $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek 3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{3k-1}$ serisi için

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+3}{3k-1} = \frac{2}{3} \neq 0$$

olduğundan seri ıraksaktır.

Teorem 3. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serileri sırasıyla S_1 ve S_2 'ye yakınsak olsunlar. Bu durumda,

(i) $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ serisi cS_1'e yakınsaktır.

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ serisi $S_1 \pm S_2$ 'ye yakınsaktır.

Teorem 4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi ise ıraksak olsun. Bu durumda $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ serisi ıraksaktır.