Etkin Faiz Oranı

Bileşik Faiz ve Etkin Faiz Oranı

Bileşik faiz hesabının kazanca etkisinin doğrusal olmadığını söylemiştik. Bileşik faiz hesabında kullanılan dönem sayısı ve buna bağlı dönem faiz oranı değiştirilerek farklı bileşik faiz almak mümkündür. Bir diğer değişle aynı yatırım süresinde dönem sayısı değiştirilerek elde edilen faiz tutarının değiştirilmesi mümkündür.

Bu koşulun gerçekleşmesi için faiz oranının değişmeyeceğinin kabulü gerekmektedir. Genellikle yatırımcılar mürekkep (bileşik) faiz ile gelecekteki faizlerin değişkenliğini takas ederler.

Yatırımcı yatırım araçlarını değerlendirirken farklı vadelerle elde edebileceği kazancı ölçebileceği bir mihenge ihtiyaç duyar

Etkin faiz oranı farklı faiz oranlarının kazandıracağı bileşik faiz oranını hesaplamamızı sağlayarak seçim yapmamızı sağlar.

Etkin faiz oranı bileşik faizin anaparaya bölünmesi ile hesaplanır.

Etkin faiz oranı (EFO) şu şekilde formüle edilebilir:

$$EFO = (1 + f')^d - 1$$

Her dönemde işleyecek faiz oranı=f'

Faiz işleyecek dönem sayısı=d

Örnek:

A bankası 6 ay vadeli mevduat hesabına %18,50 faiz vermektedir. B bankası ise aylık vadeli mevduat hesabına %18 faiz vermektedir. Eğer faiz oranlarının bir yıl boyunca değişmeyeceği kabul edilirse, yatırımcının hangi bankada vadeli mevduat hesabı açtırması daha kazançlıdır?

Çözüm:

A bankasına parasını bir yıl boyunca yatıran bir yatırımcının elde edeceği etkin faiz oranı:

Yatırımcının her dönem de yani altı ayda bir elde edeceği faiz oranı: $f_A' = \%18{,}50/2 = \%9{,}25$

Dönem sayısı: $d_A = 12/6 = 2$

$$EFO_A = (1 + \%9{,}25)^2 - 1 = (1{,}0925)^2 - 1 = 1{,}1936 - 1 = 0{,}1936 = \%19{,}36$$

Yatırımcı bir yılda, parasının %19,36’sı kadar faiz kazanır.

B bankasına parasını bir yıl boyunca yatıran bir yatırımcının elde edeceği etkin faiz oranı:

Yatırımcının her dönem de yani altı ayda bir elde edeceği faiz oranı: $f_B' = \%18/12 = \%1{,}5$

Dönem sayısı: $d_B = 12/1 = 12$

$$EFO_B = (1 + \%1{,}5)^{12} - 1 = (1{,}015)^{12} - 1 = 1{,}1956 - 1 = 0{,}1956 = \%19{,}56$$

Yatırımcı bir yılda parasının %19,56’sı kadar faiz kazanır

İki bankanın etkin faiz oranları karşılaştırıldığında B bankasının faiz oranı daha azken bir yılda daha fazla faiz kazandıracağını görebiliriz. Bunun nedeni bir yıl boyunca 12 kere işleyen paranın bileşik faiz sonucu getirisinin daha fazla olmasıdır.

Yatıracağı para ne olursa olsun yatırımcı B bankasını yatırım için seçerek daha fazla kazanç elde edecektir.

Farklı süreli dönemler için Etkin Faiz Oranı

Aynı faiz oranı farklı vadeli yatırımlar için mümkünse yatırımcının daha kısa vadeli araca yatırım yapması etkin faiz oranını arttıracaktır.

Bileşik faiz sayesinde aynı süre içerisinde dönem sayısını arttırarak faiz tutarını arttırmak mümkündür. Burada önemli kabul faiz oranının dönemler arasında değişmeyeceğidir.

X bankasında yıllık, 6 aylık, 3 aylık, aylık, haftalık ve günlük hatta saatlik vadeli hesap açtırmak mümkün olduğunu düşünelim. Her vade için aynı faiz oranını teklif eden X bankasının farklı vadeler için etkin faiz oranı şu şekilde listelenebilir:

Vade	Basit Faiz Oranı	Dönem Sayısı	Dönemlik Faiz Oranı	Etkin Faiz Oranı
Yıllık	%12	1	%12	%12
6 aylık	%12	2	%6	%12,36
3 aylık	%12	4	%3	%12,55
Aylık	%12	12	%1	%12,68
Haftalık	%12	52	%0,2308	%12,73
Günlük	%12	365	%0,0329	%12,75
Saatlik	%12	8760	%0,0014	%12,75

Sürekli Değerlenen Paranın Etkin Faiz Oranı

Yatırımcının bir mevduata parasını sürekli çekip yatırabildiğini hayal edelim. Eğer böyle bir imkan varsa dönem sayısı sonsuza giderken ($d \to \infty$) dönemlik faiz ise gittikçe küçülecektir.

Bu durum şu şekilde formüle edilebilir:

$$f' = \frac{f}{d}$$

$$EFO = (1 + f')^d - 1$$

$$EFO = \left(1 + \frac{f}{d}\right)^d - 1$$

$$EFO_\infty = \lim_{d \to \infty} \left(1 + \frac{f}{d}\right)^d - 1 = e^f - 1$$

Yukarıda verilen örnek için sonsuz dönemli yatırımın bir yılda sağlayacağı etkin faiz oranı şu şekilde hesaplanacaktır:

$$e^{0,12} - 1 = 1,1275 - 1 = 0,1275 = \%12,75$$

Vade	Basit Faiz Oranı	Dönem Sayısı	Dönemlik Faiz Oranı	Etkin Faiz Oranı
Sonsuz	%12	∞	f’->0	%12,75

Örnekler

Örnek 1

Basit faiz oranı %15 olan bir vadeli mevduat hesabının Efektif Faiz Oranı tablosunu oluşturunuz.

Çözüm

VADE	$EFO = (1 + f_d)^d - 1$
YILIK	$(1 + \%15)^1 - 1 = 1.15 - 1 = 0.15 = \%15$
ALTI AYLIK	$\left(1 + \%\frac{15}{2}\right)^2 = (1.075)^2 - 1 = 1.1556 - 1 = \%15.56$
ÜÇ AYLIK	$\left(1 + \%\frac{15}{4}\right)^4 - 1 = (1.0375)^4 - 1 = 1.1587 - 1 = \%15.87$
AYLIK	$(1 + \%15/12)12 = (1.0125)12 - 1 = 1.1608 - 1 = \%16.08$
HAFTALIK	$(1 + \%15/52)52 - 1 = (1.0029)52 - 1 = 1.1616 - 1 = \%16.16$
GÜNLÜK	$\left(1 + \%\frac{15}{365}\right)^{365} - 1 = (1.0004)^{365} - 1 = \%16.18$
SONSUZ	$e^f - 1 = e^{0,15} - 1 = 1.1618 - 1 = \%16.18$

Örnek 2

Basit faiz oranı %20 olan bir vadeli mevduat hesabının Efektif Faiz Oranı tablosunu oluşturunuz.

Çözüm

VADE	$EFO = (1 + f_d)^d - 1$
YILIK	$(1 + \%20)^1 - 1 = 1.20 - 1 = \%20$
ALTI AYLIK	$\left(1 + \%\frac{20}{2}\right)^2 - 1 = (1.01)^2 - 1 = 1.21 - 1 = \%21$
ÜÇ AYLIK	$\left(1 + \%\frac{20}{4}\right)^4 - 1 = (1.05)^4 - 1 = 1.2155 - 1 = \%21.55$
AYLIK	$\left(1 + \%\frac{20}{12}\right)^{12} - 1 = (1.01666)^{12} - 1 = 1.2194 - 1 = \%21.94$
HAFTALIK	$\left(1 + \%\frac{20}{52}\right)^{52} - 1 = (1.0638)^{52} - 1 = 1.2209 - 1 = \%22.09$
GÜNLÜK	$\left(1 + \%\frac{20}{365}\right)^{365} - 1 = (1.00547)^{365} - 1 = 1.2213 - 1 = \%22.13$
SONSUZ	$e^f - 1 = e^{0,20} - 1 = 1.2214 - 1 = \%22,14$

Örnek 3
Basit faiz oranı %18 olan bir vadeli mevduat hesabının Efektif Faiz Oranı tablosunu oluşturunuz.

Çözüm

VADE	$EFO = (1 + f_d)^d - 1$
YILIK	$(1 + \%18)^1 - 1 = (1.18)^1 - 1 = \%18$
ALTI AYLIK	$\left(1 + \%\frac{18}{2}\right)^2 - 1 = (1.09)^2 - 1 = 1.1881 - 1 = \%18.81$
ÜÇ AYLIK	$\left(1 + \%\frac{18}{4}\right)^4 - 1 = (1.045)^4 - 1 = 1.192518 - 1 = \%19.25$
AYLIK	$\left(1 + \%\frac{18}{12}\right)^{12} - 1 = (1.015)^{12} - 1 = 1.1956 - 1 = \%19.56$
HAFTALIK	$\left(1 + \%\frac{18}{52}\right)^{52} - 1 = (1.00346)^{52} - 1 = 1.1968 - 1 = \%19.68$
GÜNLÜK	$\left(1 + \%\frac{18}{365}\right)^{365} - 1 = (1.000493)^{365} - 1 = 1.1971 - 1 = \%19.71$
SONSUZ	$e^f - 1 = e^{0,18} - 1 = 1.1972 - 1 = \%19,72$

Ağırlıklı Ortalama Faiz

Şu ana kadar yapılan hesaplamalar faiz oranlarının bir yıl boyunca veya düşünülen yatırım süresince değişmeyeceği ön kabulüyle yapıldı. Fakat bu koşul çoğu zaman gerçekleşmez. Faiz oranları günlük olarak piyasa katılımcıları tarafından belirlenerek değişim gösterir.

Değişen faiz oranları ve hatta değişen vadelerde yapılacak yatırımlardan elde edilecek faiz oranı benzer şekilde hesaplanır. Bu hesaplama etkin faiz oranı hesabı ile kıyaslama için kullanılabileceği gibi yatırım süresince elde edilecek farklı faiz oranlarının ortalama getirisini hesaplamak için de kullanılabilir.

Değişen Faiz Oranlarından Elde Edilen Etkin Faiz Oranı

Nominal basit faizin farklı vadelerde farklı getirilere sahip olduğunu gördük. Aynı sürelerde farklı faiz oranlarının sağlayacağı getiri şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$EFO = [(1 + f_1')(1 + f_2') \dots (1 + f_d')] - 1$$

Dönemlik faiz oranı = f’

Dönem sayısı = d

Bu formül bir yılı eşit sürelere bölmüş dönem sayısı için geçerlidir. Eğer toplam süre bir yıldan farklı ise elde edilen efektif faiz oranı üstel olarak düzeltilmelidir:

$$\sum_{1}^{d} S' = S \neq 1\, yıl \Rightarrow$$

$$EFO = \sqrt[\left(\frac{1}{S}\right)]{(1 + f_1')(1 + f_2') \dots (1 + f_d')} - 1$$

Etkin faiz oranı (EFO) formülünün türetilmesi

$$F_n = A_0(1+f')^n - A_0$$

$$\frac{F_n}{A_0} = \frac{A_0(1+f')^n}{A_0} - \frac{A_0}{A_0}$$

$$EFO = \frac{(1+f')^n}{1} - \frac{1}{1}$$

$$EFO = (1+f')^n - 1$$

Sonsuz Dönemli EFO İspatı ve Normalleştirilmiş Faiz Oranı

$$EFO_\infty = \lim_{d\to\infty}\left(1+\frac{f}{d}\right)^d - 1 = e^f - 1$$

$$\lim_{d\to\infty}\left(1+\frac{f}{d}\right)^d = e^f = \exp(f)$$

$$\lim_{d\to\infty}\left(1+\frac{f}{d}\right)^d = \lim_{d\to\infty}\exp\left(ln\left(1+\frac{f}{d}\right)^d\right) = \lim_{d\to\infty}\exp\left(d\,ln\left(1+\frac{f}{d}\right)\right)$$

$$= \lim_{d\to\infty}\exp\left(\frac{ln\left(1+\frac{f}{d}\right)}{\frac{1}{d}}\right) = \lim_{d\to\infty}\exp\left(f\,\frac{ln\left(1+\frac{f}{d}\right)}{\frac{f}{d}}\right)$$

$$\frac{f}{d} = k \Rightarrow$$

$$\lim_{k\to0}\exp(f(\ln(1+k)/k) = \lim_{k\to0}\exp(f([\ln(1+k)-\ln(1)]/k) = \lim_{k\to0}\exp(f([\ln(k)]/k)$$

$$\lim_{k\to0}\frac{\ln(k)}{k} = \frac{d(\ln(k))}{dk}\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1$$

$$\lim_{k\to0}\exp(f([\ln(k)]/k) = \exp(f) = e^f$$

Son

Geri Bildirim İçin:

udemir@ankara.edu.tr

http://ugurdemir.info