### 1.3. Ortogonal Polinomlar Sisteminin İnşaası

Belirli bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve $w(x)$ ağırlık fonksiyonu verildiğinde ortogonal bir polinom sistemi elde edilebilir. $I$ aralığında bir ağırlık fonksiyonu $w(x)$ olmak üzere sıfırıncı dereceden bir polinom $\phi_0(x) = 1$ olsun.

$$(\phi_0,\, \phi_1) = \int\limits_I w(x)\, \phi_0(x)\, \phi_1(x)\, dx = 0$$

ortogonallik koşulu sağlanacak şekilde 1. dereceden bir $\phi_1(x)$ polinomu elde edilebilir. Ayrıca $\phi_1(x)$ üzerine *normallik koşulu* da ilave edilirse

$$\begin{aligned} &\int\limits_I w(x)\, \phi_0(x)\, \phi_1(x)\, dx = 0 \\ &\int\limits_I w(x)\ \phi_1^2(x)\, dx = 1 \end{aligned}$$

denklemlerinden $\phi_1(x)$ polinomu tek olarak belirlenir.

$$\|\phi_1\|^2 = \int\limits_I w(x)\ \phi_1^2(x)\, dx = 1$$

normallik koşulu olmaksızın sadece ortogonallik koşulunun sağlandığı bir çok $\phi_1(x)$ bulunabilir. Ancak bunların hepsi birbirinin sabit katlarıdır.

$\phi_0(x)$ ve $\phi_1(x)$ polinomlarına ortogonal olacak şekilde ikinci dereceden $\phi_2(x)$ polinomunu elde etmek için

$$\begin{aligned} &\int\limits_I w(x)\, \phi_0(x)\, \phi_2(x)\, dx = 0 \\ &\int\limits_I w(x)\ \phi_1(x)\, \phi_2(x)\, dx = 0 \end{aligned}$$

ortogonallik bağıntıları kullanılırsa $\phi_2(x)$ polinomu sabit çarpan farkıyla tek türlü olarak belirlenir. $\phi_2(x)$ in tek olarak belirlenmesi için

$$\|\phi_2\|^2 = \int\limits_I w(x)\ \phi_2^2(x)\, dx = 1$$

normallik koşulunu kullanmak yeterlidir. Böyle devam edilerek, $n$. dereceden bir $\phi_n(x)$ polinomu seçilir ve

$$\int_I w(x)\, \phi_i(x)\, \phi_n(x)\ dx = 0 \qquad ; \qquad i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

ortogonallik koşulları kullanılırsa $n$.dereceden $\phi_n(x)$ polinomu sabit çarpan farkıyla tek türlü belirlenir. Ortonormallik koşulu da ilave edilirse $\phi_n(x)$ in kesin formu bulunur.

Ortogonalliğin bir başka tanımı aşağıdaki teoremle verilebilir.

**Teorem 1.1.** $I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ polinom sisteminin $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için gerek ve yeter koşul,

$$\int_I \phi_n(x)\, \omega(x)\, x^k\, dx = 0 \qquad ; \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{1.2}$$

ifadesinin gerçeklenmesidir.

**Proof.** $(\Rightarrow)$ $\phi_n(x)$ ve $\phi_m(x)$ polinomları $I$ aralığında $\omega(x)$ ağırlık fonsiyonuna göre ortogonal iseler

$$\int_I \phi_n(x)\, \phi_m(x)\ \omega(x)\, dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n \tag{1.3}$$

gerçeklenir. $x$ in $k$ yıncı kuvveti

$$x^k = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + ... + a_k\phi_k(x) = \sum_{m=0}^{k} a_m\phi_m(x) \tag{1.4}$$

eşitliği ile $\phi_m(x)$ lerin sonlu bir serisi olarak yazılabilir. Buradan (1.4) ün (1.2) de yerine yazılmasıyla $0 \leq m \leq k < n$ için

$$\begin{aligned}
\int_I \phi_n(x)\, \omega(x)\, x^k\, dx &= \int_I \phi_n(x)\, \omega(x) \left[\sum_{m=0}^{k} a_m\phi_m(x)\right] dx \\
&= \sum_{m=0}^{k} a_m \int_I \phi_n(x)\, \phi_m(x)\ \omega(x)\ dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \leq m < n$ olmak üzere $\phi_n(x)$ ve $\phi_m(x)$ lerin (1.3) deki ortogonallik tanımı kullanılırsa

$$\int\limits_I \phi_n(x)\,\omega(x)\,x^k\,dx = 0 \quad , \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

gerçeklenir.

($\Leftarrow$) İspatın ikinci kısmı için $0 \le m < n$ alalım. $\phi_m(x)$, $m-$yinci dereceden bir polinom olduğundan

$$\phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \tag{1.5}$$

formunda yazılır. (1.3) ortogonallik bağıntısında (1.5) eşitliği kullanıldıktan sonra (1.2) gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\int\limits_I \phi_n(x)\,\phi_m(x)\;\omega(x)\,dx &= \int\limits_I \phi_n(x)\;\left[\sum_{k=0}^{m} a_k x^k\right]\;\omega(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k \int\limits_I \phi_n(x) x^k \omega(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

**Tanım 1.3**. $w(x)$, $I = (a, b)$ aralığında pozitif ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $w(x)$ ağırlık fonksiyonunun momentleri

$$\mu_n = \int\limits_a^b x^n w(x)dx \;, \quad n = 0, 1, ... \tag{1.6}$$

ile tanımlanır. $(a, b)$ aralığı sınırsız ise bütün $\mu_n$ momentleri sonlu olmalıdır.

Ağırlık fonksiyonunun momentleri kullanılarak, $\phi_n(x)$ polinomu için

$$\phi_n(x) = A_n \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

determinant gösterimi vardır. Burada $A_n$ normalizasyon sabitidir.

**Teorem 1.2.** (1.7) eşitliği ile verilen $\phi_n(x)$ polinomları (1.2) eşitliği ile verilen

$$\int_a^b \phi_n(x)\,\omega(x)\,x^k\,dx = 0 \qquad ; \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

ortogonallik koşulunu sağlar.