1.4. Ortogonal Polinomlara Örnekler

Örnek 1. $\alpha > -1\,,\ \beta > -1$ olmak üzere $-1 \leq x \leq 1$ aralığında $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *Jacobi Polinomları*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x+1)^k(x-1)^{n-k} \qquad ; \qquad n = 0,1,2,...$$

serisel gösterimine sahiptir. Bu polinomlar için

$$\left(P_m^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}\right) = \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik özelliği sağlanır. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının bilinen en önemli özel durumları aşağıdaki gibidir:

(i) *Legendre polinomları* $(\alpha = \beta = 0)$

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x).$$

(ii) Birinci çeşit *Tchebychef polinomları* $(\alpha = \beta = -1/2)$

$$T_n(x) = 2^{2n}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^{-1} P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$

(iii) İkinci çeşit *Tchebychef polinomları* $(\alpha = \beta = 1/2)$

$$U_n(x) = 2^{2n}\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x).$$

(iv) *Gegenbauer polinomları* (yada *Ultraküresel polinomları*) $(\alpha = \beta)$

$$\begin{aligned} P_n^{(\lambda)}(x) &= \begin{pmatrix} n+2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}^{-1} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x). \\ (\alpha &= \lambda - \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Örnek 2. $\alpha > -1$ olmak üzere $0 \leq x < \infty$ aralığında $w(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $L_n^{(\alpha)}(x)$ *Genelleştirilmiş Laguerre Polinom* ailesi

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \qquad ; \quad n = 0, 1, ...$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu polinomlar

$$\left(L_m^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)}\right) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik özelliğini sağlarlar. $\alpha = 0$ özel durumunda $L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$ Laguerre polinomları

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} \frac{x^k}{k!} \qquad ; \quad n = 0, 1, ...$$

formunda olup ilk birkaçının açık ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$L_0(x) = 1 \qquad , \; L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$L_1(x) = 1 - x \quad , \; L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

$L_n(x)$ Laguerre polinomları

$$(L_m, L_n) = \int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik bağıntısını sağlar.

Örnek 3. $-\infty < x < \infty$ aralığında $w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $H_n(x)$ Hermite polinom ailesi

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\, n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \qquad ; \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

serisel gösterimine sahip olup

$$(H_m, H_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n$$

ortogonallik özelliğine sahiptir.

$H_n(x)$ Hermite polinomlarına alternatif olarak, $w(x) = e^{-x^2/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $He_n(x)$ Hermite polinomları

$$(He_m, He_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} He_m(x)\, He_n(x)\, dx = 0 \qquad ; \qquad m \neq n$$

bağıntısını gerçekler ve bu polinomlarla $H_n(x)$ Hermite polinomları arasında

$$He_n(x) = 2^{-n/2} H_n(2^{-1/2} x)$$

eşitliği sağlanır. $He_n(x)$ Hermite polinomları istatistikteki uygulamalar için tercih edilen bir formdur.