1.5. Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

a, b ve c reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \tag{1.8} $$

hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ise ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu durumda $c > a + b$ için seri mutlak yakınsaktır. $x = -1$ için $c > a + b - 1$ ise hipergeometrik seri yakınsaktır.

a reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(a)_n$ ifadesi Pochhammer sembolü olarak adlandırılır ve

$$ \begin{aligned} &(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}, \\ &(a)_0 = 1 \end{aligned} $$

ile tanımlanır. $(a)_n$ Pochhammer sembolü için aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

$$ \begin{aligned} (a)_n &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \\ (a)_{n+1} &= a(a+1)_n. \end{aligned} $$

(1.8) ile tanımlanan hipergeometrik serinin genelleştirilmiş formu

$$ {}_pF_q(a_1,...,a_p;c_1,...,c_q;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n ... (a_p)_n}{(c_1)_n (c_2)_n ... (c_q)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{1.9} $$

ile verilir. ${}_2F_1(a,b;c;x)$ hipergeometrik fonksiyon gösterimi yerine genellikle $F(a,b;c;x)$ gösterimi kullanılır. Ayrıca (1.8) eşitliğinden görülür ki

$$ F(a,b;c;x) = F(b,a;c;x) $$

eşitliği sağlanır.

Şimdi de ortogonal polinom aileleri için hipergeometrik fonksiyon gösterimlerini elde edelim.

i) Laguerre Polinomlarının Hipergeometrik Gösterimi:

$n-$yinci dereceden $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomu

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \qquad ; \quad n = 0, 1, ... \tag{1.10}$$

serisel gösterimine sahiptir. Pochhammer sembolünün tanımı ve özellikleri kullanılırsa

$$(-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} = \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_k} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (1.10) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \, {}_1F_1(-n; \alpha+1; x)$$

elde edilir.

ii) Jacobi Polinomlarının Hipergeometrik Gösterimi:

$n-$yinci dereceden $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomu

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (x+1)^k (x-1)^{n-k} \\ &= \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k \end{aligned} \tag{1.11}$$

serisel gösterimine sahiptir. $x \neq 1$ için

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{2}{x-1}\right)^i$$

eşitliğini (1.11) de yerine yazıp toplamların sırasını değiştirirsek

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}\binom{k}{i}\left(\frac{2}{x-1}\right)^i \\
&= \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n+\alpha}{k+i}\binom{n+\beta}{n-k-i}\binom{k+i}{i}\left(\frac{2}{x-1}\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-i+k}\binom{n+\beta}{i-k}\binom{n-i+k}{n-i}\left(\frac{x-1}{2}\right)^i \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-n)_i}{i!\Gamma(\alpha+i+1)\Gamma(\beta+n-i+1)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^i \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)_k(-i-\alpha-1)_k}{(\beta+n-i+1)_k\, k!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $i=0,1,...,n$ için

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-i)_k(-i-\alpha-1)_k}{(\beta+n-i+1)_k\, k!} = {}_2F_1(-i,-i-\alpha-1;\beta+n-i+1;1) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_i}{(n-i+\beta+1)_i}$$

Chu-Vandermonde toplam formülü kullanılırsa, gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-n)_i(n+\alpha+\beta+1)_i}{i!(\alpha+1)_i}\left(\frac{1-x}{2}\right)^i \\
&= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_2F_1(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2})
\end{aligned}$$

hipergeometrik gösterimi elde edilir.

iii) Hermite Polinomlarının Hipergeometrik Gösterimi:

$H_n(x)$ Hermite polinomları

$$H_n(x) = (2x)^n\ {}_2F_0(-\frac{n}{2},-\frac{n}{2}+\frac{1}{2};-;-\frac{1}{x^2})$$

hipergeometrik gösterimine sahiptir.