2.2. Christoffel-Darboux Formülü

(a,b) aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan n. dereceden polinom $\phi_n(x)$ olsun. Bu kısımda birçok uygulamada önemli rol oynayan

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x)\phi_k(y)$$

toplamı için kapalı bir form elde edeceğiz.

Teorem 2.2. $\phi_n(x)$ polinomu için

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x)\phi_k(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left[\frac{\phi_n(y)\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\phi_{n+1}(y)}{x-y} \right]$$

eşitliği sağlanır. Bu formül Christoffel-Darboux formülü olarak bilinir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\phi_0(x) &= k_0 \\
\phi_1(x) &= k_1 x - k_1 k_0^2 \int_a^b x w(x)\, dx
\end{aligned}$$

olduğundan

$$K_0(x,y) = \phi_0^2(x) = k_0^2 = \frac{k_0}{k_1} \left[\frac{\phi_0(y)\phi_1(x) - \phi_0(x)\phi_1(y)}{x-y} \right]$$

olup $n=0$ için Christoffel-Darboux formülü sağlanır.

Genel durumda ispatı vermek için bir önceki kısımda elde edilen

$$\begin{aligned}
\phi_{n+1}(x) &= (xA_n + B_n)\,\phi_n(x) - C_n\,\phi_{n-1}(x) = 0\ , \\
A_n &= \frac{k_{n+1}}{k_n}\,,\ C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}
\end{aligned}$$

rekürans formülünü kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&\frac{k_n}{k_{n+1}}\left[\frac{\phi_n(y)\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x)\phi_{n+1}(y)}{x-y}\right] \\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}A_n\phi_n(x)\phi_n(y)+\frac{k_n}{k_{n+1}}C_n\left[\frac{\phi_{n-1}(y)\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)\phi_n(y)}{x-y}\right] \\
&= \phi_n(x)\phi_n(y)+K_{n-1}(x,y)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki buradan

$$K_n(x,y)=\phi_n(x)\phi_n(y)+K_{n-1}(x,y)$$

sağlanır. Son eşitlikten yararlanarak iterasyonla

$$K_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\phi_k(x)\phi_k(y)+K_0(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\phi_k(x)\phi_k(y)$$

bulunur ki bu da istenilendir.

Christoffel-Darboux formülünün her iki yanında $y\rightarrow x$ için limit alınırsa,

$$
\begin{aligned}
K_n(x,x) &= \lim_{y\rightarrow x}\frac{k_n}{k_{n+1}}\left[\frac{\phi_n(y)\phi_{n+1}(x)-\phi_n(x)\phi_{n+1}(y)}{x-y}\right] \\
&= \frac{k_n}{k_{n+1}}\left[\phi_n(x)\phi_{n+1}'(x)-\phi_n'(x)\phi_{n+1}(x)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\phi_k^2(x)\geq 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 2.3. n-yinci dereceden normu bir olan bütün $\rho(x)$ polinomları arasında, $|\rho(y)|$ yi maksimum yapan $\rho(x)$ polinomları

$$\rho(x)=\frac{\mp K_n(x,y)}{K_n^{1/2}(y,y)}$$

ile verilir. Burada y, (a,b) aralığında belirlenmiş bir noktadır.

$p\left(x\right)$, n-yinci dereceden yada düşük dereceden bir polinom ise

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(p,\phi_k\right)\phi_k(x)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca açıktır ki

$$\left(p(x),K_n\left(x,y\right)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(p,\phi_k\right)\phi_k(y)=p\left(y\right)$$

dir. $p(x)=1$ özel durumunda

$$\left(1,K_n\left(x,y\right)\right)=\int_a^b w\left(x\right)K_n\left(x,y\right)dx=1,\quad n\geq 0$$

elde edilir.