## 2.3. Ortogonal Polinomların Sağladığı Diferensiyel Denklemler

Jacobi polinomları, Laguerre polinomları, Hermite polinomları ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemlerin çözümleri olarak karşımıza çıkarlar.

**I) Jacobi Polinomlarının Diferensiyel Denklemi:**

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının sağladığı diferensiyel denklemi elde etmek için

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]$$

ifadesinde türevler alınıp açık formda yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]\\
=\ &(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-[2x+\alpha(1+x)-\beta(1-x)]\,\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}\\
=\ &1-x)^\alpha(1+x)^\beta\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(2x+\alpha+\alpha x+\beta x-\beta)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Köşeli parantez içindeki ifade $n$. dereceden bir polinom olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\sum_{j=1}^{n}a_jP_j^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.5}$$

formunda yazılabilir. Burada

$$\sum_{j=1}^{n}a_jP_j^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(2x+\alpha+\alpha x+\beta x-\beta)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.6}$$

dir. (2.5) eşitliğinde $a_j$ leri elde etmek için eşitliğin her iki yanı $P_i^{(\alpha,\beta)}(x)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında integre edilirse ve Jacobi polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılırsa

$$a_j = \frac{\int\limits_{-1}^{1} P_j^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] dx}{\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \left[P_j^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin payındaki integralde

$$P_j^{(\alpha,\beta)}(x) = u\,, \qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right] dx = dv$$

denilerek iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa ve daha sonra Jacobi polinomlarının ortogonallik özelliği dikkate alınırsa $j = 0, 1, ..., n-1$ için $a_j = 0$ olarak bulunur. Buradan (2.6) eşitliği

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - (2x + \alpha + \alpha x + \beta x - \beta)\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad (2.7)$$

formuna indirgenir. $a_n$ yi bulmak için, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ in açık ifadesi (2.7) nin her iki yanında dikkate alınıp, aynı dereceli terimlerin katsayıları birbirine eşitlenirse, gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$-n(n + \alpha + \beta + 1) = a_n$$

olarak elde edilir. Böylelikle görülür ki $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları ikinci basamaktan

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]\, y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \qquad (2.8)$$

diferensiyel denklemini sağlar. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları bu denklemin $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır.

(2.8) denkleminde $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ olarak alınırsa $T_n(x)$ birinci tür Tchebycheff polinomlarının sağladığı

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

denklemi elde edilir. $\alpha = \beta = 0$ özel durumunda ise (2.8) denklemi $P_n(x)$ Legendre polinomlarının sağladığı,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Legendre diferensiyel denklemini verir.

**II) Laguerre Polinomlarının Diferensiyel Denklemi:**

$$\frac{d}{dx}\left[xx^{\alpha}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)\right]$$

türevi açık formda yazılıp yukarıdaki benzer işlemler uygulanılırsa ve Laguerre polinomlarının ortogonallik özelliği kullanılırsa $y = L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının ikinci basamaktan

$$xy^{''} + (\alpha + 1 - x)\,y^{'} + ny = 0$$

Laguerre diferensiyel denklemini sağladığı görülür.

**III) Hermite Polinomlarının Diferensiyel Denklemi:**

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}H_n(x)\right]$$

ifadesinden hareketle $H_n(x)$ Hermite polinomlarının sağladığı ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklem

$$y^{''} - 2xy^{'} + 2ny = 0$$

formunda elde edilir.