2.5. Ortogonal Polinomlar İçin Rodrigues Formülü

Ortogonal polinom aileleri

$$\phi_n(x) = A_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[w(x)\, u^n(x) \right] \tag{2.9}$$

formunda Rodrigues formülü ile ifade edilebilmektedirler. Burada A_n sabit bir çarpan ve $w(x)$ ağırlık fonksiyonudur. $u(x)$ ise $[a, b]$ aralığının uç noktalarında sıfır değerini alan ve bu polinomların sağladığı ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerdeki y'' nün katsayısına karşılık gelen fonksiyondur.

Klasik ortogonal polinomlardan Jacobi polinomları, Tchebychef polinomları, Laguerre polinomları ve Hermite polinomları için Rodrigues formülleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \left(1-x^2\right)^n \right] \\
T_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}} \right] \\
L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^{n+\alpha} \right) \\
H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right) \\
He_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)
\end{aligned}$$

Teorem 2.6. $\phi_n(x) = A_n \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[w(x)\, u^n(x) \right]$; $n = 0, 1, 2, ...$ polinom ailesi $[a, b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

İspat. Teorem 1.1 gereğince $\phi_n(x)$ lerin $[a, b]$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olması için $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ için

$$\int_a^b w(x)\, \phi_n(x)\, x^i \, dx = 0 \tag{2.10}$$

sağlanmalıdır. $\phi_n(x)$ in açılımı (2.10) da yerine yazılırsa

$$\int_a^b w(x)\,\phi_n(x)\,x^i\,dx = A_n \int_a^b x^i \frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)\,u^n(x)\right]\,dx$$

elde edilir. Bu integralde

$$x^i = u \;\;,\;\; \frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)\,u^n(x)\right]\,dx = dv$$

denilip n kez kısmi integrasyon uygulanırsa ve $u(a) = 0\,,\; u(b) = 0$ oldukları gözönünde tutulursa

$$\int_a^b w(x)\,\phi_n(x)\,x^i\,dx = A_n(-1)^n \int_a^b w(x)\,u^n(x) \frac{d^n}{dx^n}\left(x^i\right)\,dx \tag{2.11}$$

bulunur. $i = 1, 2, ..., n-1$ için $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^i\right) = 0$ olduğundan (2.11) in sağ yanındaki integral $i = 1, 2, ..., n-1$ için sıfır olur. Bu da teoremi ispatlar.

Örnek 1. $L_n(x)$ Laguerre polinomları için Rodrigues formülünden yararlanarak $L_0(x)$, $L_1(x)$ ve $L_2(x)$ polinomlarının açık ifadelerini yazınız ve bu polinomların

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$$

reküirans formülünü gerçeklediğini gösteriniz.

Çözüm: $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$ Rodrigues formülünde $n = 0, 1, 2$ alalım.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{e^x}{0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(e^{-x}x^0\right) = e^x e^{-x} = 1 \\
L_1(x) &= \frac{e^x}{1!}\frac{d^1}{dx^1}\left(e^{-x}x\right) = e^x\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = 1 - x \\
L_2(x) &= \frac{e^x}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x}x^2\right) = \frac{e^x}{2}\frac{d}{dx}\left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right) = \frac{e^x}{2}\left(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + 1
\end{aligned}$$

elde edilirler. Bu polinomları Laguerre polinomlarının sağladığı üç-terimli rekürans formülünde yerine yazarsak

$$2L_2(x) + (x-3)L_1(x) + L_0(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right) + (x-3)(1-x) + 1 = 0$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.