2.6. Ortogonal Polinomlar İçin Doğurucu Fonksiyonlar

İki değişkenli $G(x,t)$ fonksiyonu değişkenlerinden birine göre

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)\, t^n$$

formunda bir Taylor serisine açılıyor ise $G(x,t)$ fonksiyonuna $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonu için bir *doğurucu fonksiyon* denir.

Kompleks analizden bilinmektedir ki, basit kapalı bir C çevresinin içinde analitik bir f fonksiyonunun C nin içinde bulunan herhangi bir z_0 noktasındaki değeri,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Cauchy integral formülü ile verilir. f nin z_0 daki n. türevinin değeri ise,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

ile verilmektedir. Ortogonal polinomlar için Rodrigues formülü kullanılarak Cauchy integral formülü yardımıyla doğurucu fonksiyonlar elde edilebilir.

i) Hermite Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon:

$H_n(x)$ Hermite polinomları için Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) \tag{2.12}$$

formundadır. $f(z) = e^{-z^2}$ fonksiyonunun $z_0 = x$ noktasındaki n. türev değeri, x noktasını içine alan bir C çevresi boyunca

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z - x)^{n+1}}\, dz$$

Cauchy integral formülü yardımıyla yazılabilir. Bu ifade (2.12) de yerine yazılırsa

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} \, dz$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} \, dz \right] t^n \\
&= \frac{e^{x^2}}{2\pi i} \oint_C e^{-z^2} \frac{1}{z-x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{z-x} \right)^n \right] dz
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\left| \dfrac{t}{z-x} \right| < 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{z-x} \right)^n = \frac{1}{1 + \dfrac{t}{z-x}} = \frac{z-x}{z-x+t}$$

olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, t^n = \frac{e^{x^2}}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{z-x+t} \, dz$$

elde edilir. $f(z) = e^{-z^2}$ fonksiyonu C içinde analitik olup, Cauchy integral formülünden dolayı

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, t^n = \frac{e^{x^2}}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{z-x+t} \, dz = e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{z-(x-t)} \, dz = e^{x^2} e^{-(x-t)^2} = e^{2tx-t^2}$$

sağlanır. Burada $z_0 = x - t$ noktası C çevresi içindedir. Böylece, $H_n(x)$ Hermite polinomları için bir doğurucu fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, t^n = e^{2tx-t^2}$$

formunda elde edilir.

ii) Laguerre Polinomları için Doğurucu Fonksiyon:

Şimdi de Laguerre polinomlarının serisel ifadesinden yararlanarak $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları için

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)$$

doğurucu fonksiyonunu elde edelim. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (\alpha+1)_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!}$$

serisel ifadesi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} t^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_k} \frac{(-1)^k x^k t^n}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_{n+k}}{(\alpha+1)_k} \frac{(-1)^k x^k t^{n+k}}{k! n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xt)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k+1)_n\ t^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xt)^k}{k!} (1-t)^{-\alpha-k-1} \qquad , \qquad |t|<1 \\
&= (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-xt}{1-t}\right)^k \\
&= \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)
\end{aligned}$$

doğurucu fonksiyonu elde edilir.

Bilinen diğer klasik ortogonal polinom ailelerinden bazıları için doğurucu fonksiyonlar aşağıdaki şekildedir:

iii) Jacobi Polinomları için Doğurucu Fonksiyon:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, t^n &= \frac{2^{\alpha+\beta}}{R\,(1-t+R)^{\alpha}\,(1+t+R)^{\beta}}, \\
R &= \sqrt{1-2xt+t^2}
\end{aligned}$$

iv) Legendre Polinomları için Doğurucu Fonksiyon:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

v) $He_n(x)$ **Hermite Polinomları için Doğurucu Fonksiyon:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{He_n(x)}{n!}\, t^n = e^{tx - \frac{t^2}{2}}$$