Laguerre Polinomları Cinsinden Açılımlar

$0 \le x < \infty$ aralığında parçalı sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu $L_n(x)$ Laguerre polinomları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, L_n(x) \qquad ; \quad 0 \le x < \infty$$

formunda bir seriye açılabilir. Bu eşitliğin her iki yanı $e^{-x} \, L_m(x)$ ile çarpılıp $0 \le x < \infty$ aralığında integre edilirse ve daha sonra Laguerre polinomlarının ortogonalliği ve $\|L_n\| = 1$ olduğu dikkate alınırsa, c_n katsayıları

$$c_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \, f(x) \, L_n(x) \, dx \qquad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

formunda elde edilir.

Örnek 1. $f(x) = 2x^2 - 1$ fonksiyonunu Laguerre polinomları cinsinden seriye açınız.

Çözüm: $0 \le x < \infty$ aralığında $f(x) = 2x^2 - 1$ fonksiyonu

$$f(x) = 2x^2 - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, L_n(x)$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. c_n katsayıları

$$c_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \, f(x) \, L_n(x) \, dx \qquad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

formundadır. $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = 1 - 2x + \dfrac{x^2}{2}$ oldukları ve

$$\int_0^{\infty} x^n \, e^{-x} \, dx = \Gamma\,(n+1) = n! \qquad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

olduğu dikkate alınırsa, $f(x) = 2x^2 - 1$ fonksiyonu için c_0, c_1, c_2 katsayıları

$$c_0 = \int_0^{\infty} (2x^2 - 1) \; e^{-x} \, dx = 3$$

$$c_1 = \int_0^\infty (2x^2-1)\,(1-x)\,e^{-x}dx = -8$$

$$c_2 = \int_0^\infty (2x^2-1)\left(1-2x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}\;dx = 4$$

olarak bulunur. $n > 2$ için $c_n = 0$ olduğundan istenilen serisel açılım

$$f(x) = 2x^2 - 1 = 3\,L_0(x) - 8\,L_1(x) + 4\,L_2(x)$$

olarak elde edilir.

Hermite Polinomları Cinsinden Açılımlar

$-\infty < x < \infty$ aralığında parçalı sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu $H_n(x)$ Hermite polinomları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,H_n(x) \qquad ; \quad -\infty < x < \infty$$

formunda bir seriye açılabilir. Burada c_n katsayıları

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,f(x)\,H_n(x)\,dx \quad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

formundadır.

Örnek 2. $f(x) = x^8$ fonksiyonunu Hermite polinomları cinsinden seriye açınız.

Çözüm: $-\infty < x < \infty$ aralığında $f(x) = x^8$ fonksiyonu

$$f(x) = x^8 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,H_n(x)$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. c_n katsayıları

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,x^8\,H_n(x)\,dx \quad ; \qquad n = 0, 1, ...$$

formundadır. $f(x) = x^8$ bir polinom olduğundan $n > 8$ için $c_n = 0$ dır. Dahası derecesi çift olan Hermite polinomları çift fonksiyon, derecesi tek olan Hermite polinomları tek fonksiyon olduğundan $c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = 0$ dır. $H_n(x)$ Hermite polinomlarının açık formları yerine yazılıp diğer c_n katsayıları hesaplanırsa

$$c_0 = \frac{105}{16}\ ,\ c_2 = \frac{105}{8}\ ,\ c_4 = \frac{105}{32}\ ,\ c_6 = \frac{7}{32}\ ,\ c_8 = \frac{1}{256}$$

olarak bulunur. İstenilen serisel açılım

$$f(x) = x^8 = \frac{105}{16}\,H_0(x) + \frac{105}{8}\,H_2(x) + \frac{105}{32}\,H_4(x) + \frac{7}{32}\,H_6(x) + \frac{1}{256}\,H_8(x)$$

olarak elde edilir.