2.9. Ortogonal Polinomlara İlişkin Örnekler

SORU 1. $[0,1]$ aralığında $w(x) = \sqrt{x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan ve $(0,1)$ noktasından geçen $\phi_n(x)$ polinomlarının ilk üçünü bulunuz.

Çözüm: $\phi_0(x) = A_0$ sabit polinomunun $(0,1)$ noktasından geçmesi için $A_0 = 1$ olmalıdır ve buradan da $\phi_0(x) = 1$ bulunur.

$$\phi_1(x) = A_1 x + B_1$$

seçelim. $\{\phi_n(x)\}$ polinom dizisi ortogonal olduğundan

$$(\phi_0, \phi_1) = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_1) &= \int_0^1 \phi_0(x)\, \phi_1(x) w(x)\, dx \\
&= \int_0^1 (A_1 x + B_1)\sqrt{x} dx = \left[A_1 \frac{2}{5} x^{5/2} + B_1 \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5} A_1 + \frac{2}{3} B_1 = 0 \\
&\Rightarrow\ A_1 = -\frac{5}{3} B_1 \\
&\Rightarrow\ \phi_1(x) = -\frac{5}{3} B_1 x + B_1
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\phi_1(x)$ in $(0,1)$ noktasından geçmesi için

$$\phi_1(0) = B_1 = 1$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$$\phi_1(x) = -\frac{5}{3} x + 1$$

olarak bulunur.

$$\phi_2(x) = A_2 x^2 + B_2 x + C_2$$

seçelim. $\{\phi_n(x)\}$ polinom dizisi ortogonal olduğundan

$$(\phi_0, \phi_2) = 0 \qquad \text{ve} \qquad (\phi_1, \phi_2) = 0$$

dır.

$$\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_2) &= \int_0^1 \phi_0(x)\, \phi_2(x) w(x)\; dx \\
&= \int_0^1 \left(A_2x^2 + B_2x + C_2\right) \sqrt{x} dx \\
&= \left(A_2\frac{2}{7} + B_2\frac{2}{5} + C_2\frac{2}{3}\right) = 0 \\
&\Rightarrow \; A_2\frac{2}{7} + B_2\frac{2}{5} + C_2\frac{2}{3} = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi_1, \phi_2) &= \int_0^1 \phi_1(x)\, \phi_2(x) w(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{5}{3}x + 1\right) \left(A_2x^2 + B_2x + C_2\right) \sqrt{x} dx \\
&= \left(-\frac{16}{189}A_2 - \frac{8}{110}B_2\right) = 0 \\
&\Rightarrow \; -\frac{16}{189}A_2 - \frac{8}{110}B_2 = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

bulunur. (2) den

$$B_2 = -\frac{10}{9}A_2$$

elde edilir. Bu değer (1) de yazılırsa $C_2 = \dfrac{5}{21}A_2$ bulunur. Buradan

$$\phi_2(x) = A_2x^2 - \frac{10}{9}A_2x + \frac{5}{21}A_2$$

şeklinde olur. $\phi_2(x)$ in $(0, 1)$ noktasından geçmesi için $\phi_2(0) = 1$ olmalıdır. O halde

$$\phi_2(0) = \frac{5}{21}A_2 = 1 \;\; \text{den} \qquad A_2 = \frac{21}{5}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\phi_2(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{14}{3}x + 1$$

dir.

SORU 2. $T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n! x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(2k)!(n-2k)!} = \cos(n \arccos x)$ ile verilen birinci tür Tchebycheff polinomlarının tüm sıfırlarını bulunuz.

Çözüm: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n! x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(2k)!(n-2k)!} = \cos(n \arccos x) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \cos(n \arccos x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad n \arccos x = (k - \frac{1}{2})\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \quad x_k = \cos\left[(k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}\right] \ , \ k = 1, 2, ..., n \ ; \ n \in \mathbb{N}^+
\end{aligned}$$

bulunur. Bu kökler reeldir. Belirli bir $n \in \mathbb{N}^+$ için ve $k = 1, 2, ..., n$ için $\cos\left[(k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}\right]$ fonksiyonu aynı değerleri alamayacağından bu kökler basit köklerdir.
Dolayısıyla $[-1, 1]$ aralığında $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem teşkil eden Tchebycheff polinomlarının sıfırları

$$x_k = \cos\left[(k - \frac{1}{2})\frac{\pi}{n}\right] \ , \ k = 1, 2, ..., n$$

olup $(-1, 1)$ aralığında basit olan reel köklerdir.

SORU 3. $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları için bilinen

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{-x}\, x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+\alpha}\right)$$

Rodrigues formülünden yararlanarak $L_n^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının ilk üçünü elde ediniz.

SORU 4. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$; $n = 0, 1, ...$ Hermite polinomları için Rodrigues formülünden yararlanarak aşağıdaki doğurucu fonksiyon bağıntısını elde ediniz.

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

SORU 5. $F(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$ fonksiyonunun $(1-t^2)F_x - 2t^2F_t = tF$ denklemini gerçeklediğini gösteriniz ve bundan yararlanarak aşağıdaki rekürans bağıntısını elde ediniz.

$$P'_{n+2}(x) - P'_n(x) = (2n+3)\,P_{n+1}(x) \quad , \quad n \geq 0$$

SORU 6. $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$ çift fonksiyon ve

$$\int_0^1 x^{2n}\,f(x)\,dx = n+1 \quad ; \quad n = 0,1,...$$

olsun. $[-1,1]$ aralığında $w(x) = f(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\phi_n(x)$ $(n = 0,1,...)$ polinomlarının ilk dördünü elde ediniz. $g(x) = x^3$ fonksiyonunu bu polinomlar cinsinden seriye açınız.

SORU 7. $-1 < x < 1$ aralığında $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$ fonksiyonunu Legendre serisine açınız.