2. Korunumlu Alanlar

$$\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

nabla operatörü olmak üzere

$$rot\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \equiv \overrightarrow{0}$$

ise $\overrightarrow{V}$ kuvvet alanı korunumludur denir. Bu durum bize

$$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$$

ifadesinin bir tam diferensiyel olduğunu söyler. O halde öyle bir $\Phi(x,y,z)$ fonksiyonu vardır ki

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X(x,y,z) \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y(x,y,z) \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z(x,y,z)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $\Phi(x,y,z)$ fonksiyonuna kuvvet fonksiyonu denir.

$$H(x,y,z) = -\Phi(x,y,z)$$

fonksiyonu ise potansiyel fonksiyonu adını alır. Potansiyellerin değişmediği

$$H(x,y,z) = \text{sabit}$$

denklemi ile tanımlanan yüzeylere eş potansiyelli yüzeyler adı verilir. Korunumlu bir alanda $A(a_1,a_2,a_3)$ noktasından $B(b_1,b_2,b_3)$ noktasına gidilmesi halinde yapılan iş

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \int_\gamma dT = \int_A^B d\Phi(x,y,z) = \Phi(x,y,z)\Big|_A^B \\ &= \Phi(B) - \Phi(A) = H(A) - H(B) \end{aligned}$$

dir.

Örnek 1.

$\overrightarrow{V} = [2xz^3 + 6y,\ 6x - 2yz,\ 3x^2z^2 - y^2]$ vektörü ile tanımlanan kuvvet alanının korunumlu olduğunu gösteriniz ve eş potansiyelli yüzeylerin denklemini bulunuz. Bu alanda $A(1,-1,1)$ noktasından $B(2,1,-1)$ noktasına gidilmesiyle yapılan işi hesaplayınız.

Çözüm:

$$\overrightarrow{V} = X(x,y,z)\,\overrightarrow{i} + Y(x,y,z)\,\overrightarrow{j} + Z(x,y,z)\,\overrightarrow{k}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} rot\overrightarrow{V} &= \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3 + 6y & 6x - 2yz & 3x^2z^2 - y^2 \end{vmatrix} \\ &= (-2y + 2y)\,\overrightarrow{i} - (6xz^2 - 6xz^2)\,\overrightarrow{j} + (6 - 6)\,\overrightarrow{k} \\ &\equiv \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

olduğundan verilen kuvvet alanı korunumludur ve yapılan iş yoldan bağımsızdır. O halde öyle bir $\Phi(x,y,z)$ fonksiyonu vardır ki,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xz^3 + 6y \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6x - 2yz \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 3x^2z^2 - y^2$$

dir. O halde kuvvet fonksiyonu,

$$\Phi(x,y,z) = x^2z^3 + 6xy - y^2z + c$$

olarak bulunur. Potansiyel fonksiyon,

$$H(x,y,z) = -x^2z^3 - 6xy + y^2z - c$$

olup eş potansiyelli yüzeylerin denklemi,

$$x^2z^3 + 6xy - y^2z = c$$

şeklindedir. Bu alanda yapılan iş yoldan bağımsız olup,

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \int\limits_{\gamma} dT = \int\limits_{A}^{B} d\Phi(x,y,z) = \Phi(x,y,z)|_A^B \\ &= \Phi(B) - \Phi(A) \\ &= 15 \text{ iş birimi} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.