Ağırlık Merkezinin Bulunması

W cismi uzaysal ise, G ağırlık merkezinin $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ koordinatları;

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M} \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_y}{M} \quad , \quad \overline{z} = \frac{M_z}{M}$$

şeklindedir. Burada;

$$\begin{aligned} M_x &= \iiint\limits_W x\,dm = \iiint\limits_W \delta(x,\,y,\,z)\,x\,dzdydx \\ M_y &= \iiint\limits_W y\,dm = \iiint\limits_W \delta(x,\,y,\,z)\,y\,dzdydx \\ M_z &= \iiint\limits_W z\,dm = \iiint\limits_W \delta(x,\,y,\,z)\;z\,dzdydx \\ M &= \iiint\limits_W \;dm = \iiint\limits_W \delta(x,\,y,\,z)\,dzdydx \end{aligned}$$

dir.

Cisim düzlemsel ise, $G(\overline{x},\overline{y})$ ağırlık merkezi için $\overline{x}$, $\overline{y}$ koordinatları,

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M} \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_y}{M}$$

formülleriyle hesaplanır. Burada,

$$\begin{aligned} M_x &= \iint\limits_W x\,dm = \iint\limits_W \delta(x,\,y)x\,dydx \\ M_y &= \iint\limits_W y\,dm = \iint\limits_W \delta(x,\,y)y\,dydx \\ M &= \iint\limits_W dm = \iint\limits_W \delta(x,\,y)\,dydx \end{aligned}$$

dir.

Cisim doğrusal ise, $G(\overline{x})$ ağırlık merkezi,

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int\limits_a^b \delta(x)x\,dx}{\int\limits_a^b \delta(x)\,dx}$$

olur.

Cisim bir uzay eğrisi ise, $G(\overline{x},\, \overline{y},\, \overline{z})$ ağırlık merkezinin koordinatları;

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int\limits_\gamma \delta x\,ds}{\int\limits_\gamma \delta\,ds} \quad , \quad \overline{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int\limits_\gamma \delta y\,ds}{\int\limits_\gamma \delta\,ds} \quad , \quad \overline{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{\int\limits_\gamma \delta z\,ds}{\int\limits_\gamma \delta\,ds}$$

şeklindedir.

Örnek 1.

$x^2+y^2 = a^2$ ve $z = a\ln\left(\frac{a}{x}\right)$ yüzeylerinin arakesit eğrisi boyunca $A\,(a,\, 0,\, 0)$ ve $A\left(\frac{a}{2},\, \frac{\sqrt{3}a}{2},\, a\ln 2\right)$ noktaları arasına yerleştirilmiş bulunan bir tel parçasının yoğunluğu $\delta(x,\, y,\, z) = kxy$ dir. Bu tel parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm:

$xyz-$uzayında verilen bu eğrisel cisim γ olsun.

$$\gamma = \left\{(x, y, z) : x = a\cos t,\; y = a\sin t,\; z = -a\ln\cos t \;\;;\; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$$

$P(x, y) \in \gamma$ noktasında;

Yoğunluk: $\delta(P) = kxy = ka^2\cos t\sin t$

Hacim elemanı: $dv = ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt = \dfrac{a}{\cos t}dt$

Kütle elemanı: $dm = \delta\,dv = ka^3\sin t\,dt$ şeklindedir.

$G(\overline{x}, \overline{y},\ \overline{z})$ ağırlık merkezinin, $\overline{x} = \dfrac{M_x}{M}$, $\overline{y} = \dfrac{M_y}{M}$, $\overline{z} = \dfrac{M_z}{M}$ koordinatları için,

$$\begin{aligned}
M &= \int\limits_{\gamma} dm = \int\limits_{0}^{\pi/3} ka^4 \sin t dt = ka^3 \cos t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{ka^3}{2} \text{ birim kütle} \\
M_x &= \int\limits_{\gamma} x\, dm = \int\limits_{0}^{\pi/3} ka^4 \cos t \sin t dt = \frac{ka^4}{2} \sin^2 t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{3ka^4}{8} \\
M_y &= \int\limits_{\gamma} y\, dm = \int\limits_{0}^{\pi/3} ka^4 \sin^2 t dt = \frac{ka^4}{2}\ t - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/3} \\
&= \frac{ka^4}{2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \\
M_z &= \int\limits_{\gamma} z dm = -\int\limits_{0}^{\pi/3} ka^4 \sin t \ln(\cos t)\, dt = \frac{ka^4}{2}(1 - \ln 2)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\overline{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{3}{4}a \ , \ \overline{y} = \frac{M_y}{M} = a\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] \ , \ \overline{z} = \frac{M_z}{M} = a(1 - \ln 2)$$

olup, γ eğrisinin ağırlık merkezi

$$G\left(\frac{3}{4}a,\ \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]a,\ a(1 - \ln 2)\right)$$

şeklindedir.