Periyodik Fonksiyonlar ve Fourier Serileri I

Düzgün Süreksizlik Noktası: Bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup bu iki limit birbirinden farklı ise, x_0 noktasına f fonksiyonunun bir düzgün süreksizlik noktası denir.

$$
\begin{aligned}
f(x_0^+) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 + \varepsilon) \quad \text{sağ limit} \quad , \quad \varepsilon > 0 \\
f(x_0^-) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{sol limit} \quad , \quad \varepsilon > 0
\end{aligned}
$$

Parçalı Sürekli Fonksiyon: Bir $[a, b]$ aralığında sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli olan bir fonksiyona $[a, b]$ aralığında parçalı süreklidir denir.

Örnek 1. Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıkta parçalı sürekli olup olmadıklarını belirtiniz. Varsa düzgün süreksizlik noktalarında sağ ve sol limitleri hesaplayınız.

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ x^2 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x}{x-2} & , \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$

Çözüm: a) $x_0 = 1$ bir kritik nokta olup $x_0 \in [0, 2]$ dir. Buna göre $x_0 = 1$ noktasındaki sağ ve sol limitler,

$$f(1^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(1 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} (1 + \varepsilon)^2 = 1$$

$$f(1^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(1 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2 = 2$$

şeklindedir. Buna göre x_0 noktasındaki sağ ve sol limitler sonlu ve birbirinden farklı olduğundan $x_0 = 1$ noktası bir düzgün süreksizlik noktasıdır. Düzgün süreksizlik noktası bir tane yani sonlu olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında parçalı süreklidir.

b) $x_0 = 2$ bir kritik nokta olup $x_0 \in [1, 3]$ tür. Buna göre $x_0 = 2$ noktasındaki sağ ve sol limitler,

$$f(2^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(2 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon} = \infty$$

$$f(2^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(2 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon - 1 = -1$$

şeklindedir. Buna göre x_0 noktasındaki sağ limit sonlu olmadığından $x_0 = 2$ noktası bir düzgün süreksizlik noktası değildir. Dolayısıyla verilen f fonksiyonu $[2,3]$ aralığında parçalı sürekli değildir.

Çift Fonksiyon

Simetrik bir aralıkta tanımlı bir f fonksiyonu $f(-x) = f(x)$ sağlanıyorsa f ye çift fonksiyon denir. Çift bir fonksiyonun grafiği y-eksenine göre simetriktir.

Tek Fonksiyon

Simetrik bir aralıkta tanımlı bir f fonksiyonu $f(-x) = -f(x)$ sağlanıyorsa f ye tek fonksiyon denir. Tek fonksiyonun grafiği orijin noktasına göre simetriktir.

Örnek 2.

$f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ de tanımlı olup, çift fonksiyondur. $g(x) = \sinh x$ fonksiyonunun da tanım aralığı $(-\infty, \infty)$ olup tek fonksiyondur.

Periyodik Fonksiyonlar

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $p \in \mathbb{R}$ varsa f ye periyodik fonksiyon, p ye de f nin periyodu denir. Eğer f fonksiyonu periyodik ve peryodu p ise,

Periyodik bir f fonksiyonunun pozitif p periyotları arasında bir en küçüğü varsa ona f nin asli periyodu denir.

Örnek 3.

$f(x) = \sin 3x$ fonksiyonu periyodik bir fonksiyon olup, periyodu $p = \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$ bulunur. f fonksiyonunun asli periyou ise $k = 1$ için $T = \dfrac{2\pi}{3}$ bulunur.

Ortogonal Fonksiyonlar Sistemi

$\{\phi_n(x)\}$ bir $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların bir dizisi olsun. $\forall x \in [a,b]$ için

$q(x) \geq 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere eğer,

$$\int_a^b q(x)\,\phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

sağlanıyor ise, $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisine $[a,b]$ aralığında $q(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal (dik) bir sistem teşkil ediyor denir. Eğer bu integralde $m = n$ alınırsa,

$$\|\phi_n\| = \left[\int_a^b q(x)\phi_n^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

ifadesine $\{\phi_n\}$ ortogonal sisteminin normu denir.

Ortogonal bir sistemin herbir elemanı normuna bölünerek ortonormal bir sistem elde edilir. Ortonormal sistemler,

$$\int_a^b q(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0 \ , & m \neq n \\ 1 \ , & m = n \end{cases}$$

koşulunu gerçeklerler.