Çift ve Tek Fonksiyonların Fourier Serileri

a) $f(x)$, $(-\pi, \pi)$ de çift fonksiyon ise,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx = 0$$

olurlar. Böylece $f(x)$ çift fonksiyonunun 2π peryotlu Fourier serisi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

şeklindedir.

b) $f(x)$, $(-\pi, \pi)$ de tek fonksiyon ise,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\;dx$$

olurlar. Böylece $f(x)$ tek fonksiyonunun 2π peryotlu Fourier serisi,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

dir.

Örnek 1. $-\pi < x < \pi$ aralığında $f(x) = \cos \alpha x$ fonksiyonu ile çakışan 2π periyotlu periyodik fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm:

$x \in (-\pi, \pi)$ için, $f(-x) = \cos(-\alpha x) = \cos \alpha x = f(x)$ olup, f fonksiyonu çift fonksiyondur.

$f(x)$ in Fourier serisi, $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ şeklinde olacaktır. a_0 ve a_n Fourier katsayıları,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha x dx = \frac{2}{\alpha\pi} \sin \alpha x|_0^{\pi} = \frac{2\sin \alpha\pi}{\alpha\pi}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx\ dx \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(\alpha+n)x + \sin(\alpha-n)x]dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)x}{(\alpha+n)} + \frac{\sin(\alpha-n)x}{(\alpha-n)}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n \sin \alpha\pi}{\pi}\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2},\ n = 1, 2...
\end{aligned}$$

olduklarından, istenilen Fourier serisi,

$$f(x) = \cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos(nx)$$

olarak elde edilir.

Kompleks Fourier Serileri

f fonksiyonunun kompleks Fourier serisi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 2. $f(x) = e^{2x}$; $-\pi < x < \pi$ olarak verilen fonksiyonun kompleks Fourier serisini bulunuz.

Çözüm:

İstenilen Fourier serisi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2-in)} \, e^{(2-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{1}{(2-in)} \left[e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in)\pi} \right] \\
&= \frac{(-1)^n \sinh 2\pi}{\pi} \frac{1}{2-in}
\end{aligned}
$$

olup istenilen kompleks Fourier serisi;

$$
f(x) = e^x = \frac{sh2\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2-in} \, e^{inx}
$$

olarak elde edilir.