İntegral Yardımı ile Tanımlanan Fonksiyonlar ve Leibnitz Kuralı

$f(x,t)$ bir $R = \{(x,t) : a \le x \le b,\ c \le t \le d\}$ dikdörtgeninde tanımlı, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ de $a \le x \le b$ de tanımlı iki fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x) = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} f(x,t)\ dt$$

şeklinde ifade edilen $\phi(x)$ fonksiyonu integral yardımıyla tanımlanmış bir fonksiyondur.

İntegral yardımıyla tanımlanmış $\phi(x)$ fonksiyonunun $\phi'(x)$ türevi,

$$\phi'(x) = f[x, u_1(x)]\ u_1'(x) - f[x, u_0(x)]\ u_0'(x) + \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt$$

dir. Bu formül integral yardımıyla tanımlanan fonksiyonlarda Leibnitz kuralı olarak bilinir.

Örnek 1.

$\phi(x) = \displaystyle\int_{k/x^3}^{x^4} \frac{1}{t}\cos\left(\frac{t^2}{x^6}\right) dt$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$f(x,t) = \dfrac{1}{t}\cos\left(\dfrac{t^2}{x^6}\right),\ u_0(x) = \dfrac{k}{x^3},\ u_1(x) = x^4$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f[x, u_1(x)] &= \frac{1}{x^4}\cos\left(x^2\right) \\ f[x, u_0(x)] &= \frac{x^3}{k}\cos\left(\frac{k^2}{x^{12}}\right) \\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= \frac{6t}{x^7}\sin\left(\frac{t^2}{x^6}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. İntegral yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar için Leibnitz kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= f[x,u_1(x)]\,u_1'(x) - f[x,u_0(x)]\,u_0'(x) + \int\limits_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt \\
&= \frac{4}{x}\cos\left(x^2\right) + \frac{3}{x}\cos\left(\frac{k^2}{x^{12}}\right) + \frac{3}{x}\int\limits_{k/x^3}^{x^4} \frac{6t}{x^7}\sin\left(\frac{t^2}{x^6}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{x}\cos\left(x^2\right) + \frac{6}{x}\cos\left(\frac{k^2}{x^{12}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere bir u fonksiyonu $u(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)dt$ olarak verilmektedir. Buna göre $u'''(x) = f(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$F(x,t) = \frac{1}{2}(x-t)^2 f(t),\ u_0(x) = 0,\ u_1(x) = x$ olmak üzere $u(x)$ fonksiyonu için Leibnitz kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
u'(x) &= F[x,u_1(x)]\,u_1'(x) - F[x,u_0(x)]\,u_0'(x) + \int\limits_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\,dt \\
&= F[x,x]\,.1 - F[x,0]\,.0 + \int\limits_0^x (x-t)f(t)\,dt
\end{aligned}$$

bulunur. $u'(x)$ fonksiyonu ve elde edilecek $u''(x)$ fonksiyonu için bir kez daha Leibnitz kuralı uygulandığında,

$$\begin{aligned}
u''(x) &= F[x,x]\,.1 - F[x,0]\,.0 + \int\limits_0^x f(t)\,dt \\
u'''(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.

$\phi(x) = \int\limits_0^x \dfrac{2t}{x^2+t^2}dt$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

Çözüm: $f(x,t) = \dfrac{2t}{x^2+t^2}$, $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = x$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f[x, u_1(x)] &= \frac{1}{x} \\ f[x, u_0(x)] &= 0 \\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= \frac{4xt}{(x^2+t^2)^2} \end{aligned}$$

şeklindedir. İntegral yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar için Leibnitz kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f[x, u_1(x)]\, u_1'(x) - f[x, u_0(x)]\, u_0'(x) + \int\limits_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\, dt \\ &= \frac{1}{x} - \int\limits_0^x \frac{4xt}{(x^2+t^2)^2} dt \\ &= \frac{1}{x} - 2x\left(-\frac{1}{x^2+t^2}\right)\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.