GammaFonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

Gamma fonksiyonu,

1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

2) $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

eşitliklerini sağlar.

Örnek 1.

Gamma fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki değerleri hesaplayınız.

a) $\left(\frac{7}{2}\right)!$ **b)** $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$

Çözüm:

a) Gamma fonksiyonunun 2) tanımından

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{105}{6}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

bulunur.

b) Gamma fonksiyonunun 1) tanımından,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \Longrightarrow \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \\
\Gamma(x+2) &= (x+1)\,\Gamma(x+1) \Longrightarrow \Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+2)}{(x+1)} \\
\Gamma(x+3) &= (x+2)\,\Gamma(x+2) \Longrightarrow \Gamma(x+2) = \frac{\Gamma(x+3)}{(x+2)}
\end{aligned}$$

kullanılarak,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+3)}{x\,(x+1)\,(x+2)}$$

yazılabilir. O halde, $x = -\dfrac{5}{2}$ alınarak,

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

Örnek 2.

$\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x^3} dx$ integralinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$x^3 = t$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x^3} dx &= \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty t^{\frac{2}{3}} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \\
&= \frac{2}{9}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{\alpha+1}}dx$ integralinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$\ln x = t$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{\alpha+1}}dx &= \int_0^\infty te^{-\alpha t}dt \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty ue^{-u}du \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\Gamma(2) \\
&= \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.

$\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^{1/3}dx$ integralinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$\ln x = -t$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln x)^{1/3}dx &= \int_\infty^0 (-t)^{1/3}(-e^{-t})dt \\
&= -\int_0^\infty t^{1/3}e^{-t}dt \\
&= -\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.