

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ**  
**MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ**  
**FİZİK MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ**

**FZM443 PARÇACIK HIZLANDIRICILARI**

**Prof. Dr. Ömer Yavaş**

1. Hafta: Parçacık Hızlandırıcıları: Temel Kavramlar
2. Hafta: Parçacık Çarpıştırıcıları: Işınlık ve Kütle Merkezi Enerjisi
3. Hafta: Doğrusal Hızlandırıcılar: Temel İlkeler
4. Hafta: RF Doğrusal Hızlandırıcılar
5. Hafta: Dairesel Hızlandırıcılar: Betatron ve Mikrotron
6. Hafta: Dairesel Hızlandırıcılar: Siklotron ve Sinkrotron
7. Hafta: Enine Demet Dinamiği-I
8. Hafta: Enine Demet Dinamiği-II
9. Hafta: Boyuna Demet Dinamiği
10. Hafta: Arasınava ve Problem Çözümü
11. Hafta: Hızlandırıcıya Dayalı Işınım Kaynakları: Sinkrotron Işınımı
12. Hafta: Hızlandırıcıya Dayalı Işınım Kaynakları: Serbest Elektron Lazeri
13. Hafta: Parçacık Hızlandırıcıları ve Işınım Kaynaklarının Kullanım Alanları
14. Hafta: TAEK-PHT ve Ankara Ü. TARLA Tesislerine Teknik Gezi

**Kaynak Kitaplar:**

- H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics, Springer (2007)
- D. A. Edwards, M.J. Syphers, An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators, Wiley-VCH (2004)

## 1. PARÇACIK HIZLANDIRICILARI: TEMEL KAVRAMLAR

### 1.1. Giriş

Parçacık hızlandırıcıları ve çarpıştırıcıları bilimsel ve teknolojik ihtiyaçlara göre tasarlanan ve temelde mekanik, elektrik, manyetizma, elektronik, yazılım, istatistik, termodinamik, malzeme, kuantum fiziği vb. temel bilim ve mühendislik alanlarına dayalı olarak üretilen ve kullanılan yüksek teknolojik donanımlardır. Yüklü parçacık demetleri hızlandırıcılarda hedeflenen yüksek enerjilere ulaştırılarak sabit hedef ve çarpıştırıcı deneylerinde veya sinkrotron ışınımı ve serbest elektron lazeri gibi ışınımları hızlandırıcıya dayalı olarak üretmede kullanılmaktadır.

Hızlandırıcı fiziği; tek parçacığın veya bir parçacık demetinin, elektrik ve manyetik alanlar etkisindeki hareketini; yörünge, momentum, enerji kazanımı, dağılıma ve toplama süreçleri vb. parametreler açısından ele alıp inceleyen bir bilim dalıdır.

Parçacık çarpıştırıcıları ise bir parçacık demetini farklı bir demet ile veya söz konusu parçacığın (örn. elektron) anti-parçacığının (örn. pozitron) demeti ile, fiziksel amaçlar için belirlenmiş uygun bir kütle merkezi enerjisi (  $E_{c.m.} \equiv \sqrt{s}$  ) ve birim zamanda birim yüzeyde etkileşme sayısını veren ışınlık (luminosite,  $L$  ) değeri ile çarpıştıran aygıtlardır. Çarpıştırıcılarda kullanılan yüklü parçacık demetleri doğrusal (linear) ve/veya dairesel (circular) hızlandırıcılardan elde edilebilir.

Günümüzde  $e^-$ ,  $e^+$ ,  $p$ ,  $\bar{p}$ ,  $\mu^-$ ,  $\mu^+$  vb. gibi yüklü temel parçacıkların demetleri, değişik tekniklerle GeV ve TeV mertebesinde enerjilere ulaştırılabilmektedirler.

(  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Joule}$ ,  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ ,  $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$  ).

Hızlandırıcılarda ulaşılan maksimum enerji değeri her 7 yılda bir merteye artarak son 50 yılda  $10^6$ 'dan  $10^{13}$  mertebesine yükselmiştir. 1950' li yıllarda kuvvetli odaklamalı bir sinkrotronda  $10^6 \text{ eV}$ ' ye ulaşılmış olmasına rağmen, 2010' da çalışmaya başlayan

CERN Büyük Hadron Çarpıştırıcısında (LHC proton-proton çarpıştırıcısı) proton demetlerinin enerjisi  $7 \text{ TeV} = 0.7 \times 10^{13} \text{ eV}$  düzeyine ulaşmıştır.

Tablo 1.1. Parçacık demetleri için bazı temel parametrelerin değer aralıkları

Demet enerjisi (E)	keV- TeV
Demet akımı (i)	$\mu\text{A}$ - kA
Atma (puls) süresi ( $\tau$ )	Sürekli - ps
Demet yaşam süreleri	$\mu\text{s}$ - haftalar

Günümüzde parçacık hızlandırıcıları ile elektron, pozitron, proton, anti-proton, pion, kaon, müon, nötrino, atom ve molekül demetleri oluşturulabilmektedir. Demetler sürekli, paketçikli ( bunched ) veya atmalı (pulsed) yapıda olabilirler. Demet fiziği parçacık ve foton demetlerini, bunların doğasını, davranışlarını, demet-madde ve demet-ışınma etkileşmelerini inceleyen bir bilim dalıdır. Demetler üzerinde kullanılan alanlar statik, atmalı ( pulsed ) ve RF salınımlı olabilir.

Hızlandırıcı teknolojileri ana hatları ile parçacık kaynakları, RF mühendisliği ve RF kavite, magnetler, soğutma teknolojileri, yüksek gradyenli alanlar, düşük yayınımlı (emittans) ve yüksek yoğunluklu demetler, zigzaglayıcı (wiggler) ve salındırıcı (undulator) magnetler, demet durdurucuları, demet diyagnostiği ve elektronik kontrolü ve vakum teknolojilerini kapsamaktadır. Bu teknolojilerin; yüksek enerji fiziği deneyleri, nükleer fizik deneyleri, sinkrotron ışınım kaynağı, serbest elektron lazeri, atmalı nötron kaynağı, ikincil demetlerin elde edilmesi, malzeme bilimi, iyon implantasyonu, kimya, biyoloji, tıp, petrol aranması, gıda sterilizasyonu, savunma sanayi gibi onlarca kullanım alanı bulunmaktadır.

## 1.2. Hızlandırıcı Tipleri ve Önemli Kavramlar

**Yüksek Gerilim Hızlandırıcıları ( High Voltage Accelerators ):** Bu tip bir hızlandırıcıda her parçacık oluşturulan potansiyel farkını bir kez geçerek  $K = e\Delta V$  kadar kinetik enerji kazanır.

**İndüksiyon Hızlandırıcıları (Induction Accelerators):** İndüksiyon hızlandırıcılarında hızlandırmada kullanılan elektrik alanı zamanla değişen manyetik alan tarafından indüksiyon yoluyla oluşmaktadır.

**Doğrusal Hızlandırıcılar ( Linear Accelerators ):** Doğrusal hızlandırıcılar hızlandırıcı üniteler olan RF kaviteletin doğrusal bir hat üzerinde bulunduğu hızlandırıcıdır.

**Dairesel Hızlandırıcılar ( Circular Accelerators ):** Dairesel hızlandırıcılar en az bir RF hızlandırıcı ünite (kavite) içeren ve demetlerin manyetik alan aracılığı ile dairesele/eğrisel yörüngelerde tutulduğu hızlandırıcıdır.

**Tekrarlı Hızlandırıcılar ( Cyclic Accelerators ):** Tekrarlı hızlandırıcılarda parçacıklar doğrusal veya dairesele olarak aynı potansiyel farkını defalarca geçerler.

**Betatron ( Betatron ):** Betatron hafif parçacıklar geliştirilmiş, indüksiyon ilkesiyle hızlandırma yapan dairesele hızlandırıcıdır.

**Siklotron ( Cyclotron ):** Siklotron, proton veya ağır iyonların salınımlı RF gerilim sayesinde hızlandırıldığı, yörünge yarıçapının her dolanımda büyüdüğü ve yörünge yarıçapının D şekilli magnetlerin boyutları ile sınırlandırıldığı dairesele hızlandırıcıdır.

**Mikrotron ( Microtron ):** Mikrotron, parçacıkların her dolanımda aynı RF kaviteden geçirildiği, yörünge yarıçapının giderek arttığı ve yörünge yarıçapının bükücü magnet yarıçapı ile sınırlandırıldığı dairesele hızlandırıcıdır.

**Sinkrotron ( Synchrotron):** Sinkrotron, yörünge yarıçapının (R) sabit olduğu, hem ağır hem de hafif parçacıkları çok yüksek enerjilere ulaştırılabilen dairesele RF hızlandırıcıdır.

**Depolama Halkaları ( Storage Rings ):** Depolama halkası, yüklü parçacık demetlerini sabit enerjide saklayan bir sinkrotrondur. Depolama halkası kavramı daha çok sinkrotron ışınımı tesislerinde kullanılan sabit enerjili sinkrotronlar için kullanılır.

**Çarpışan Demet Deneyi ( Colliding Beam Experiment ):** Zıt yönde hızlandırılmış demetlerin çarpıştırılmalarını içeren deneylerdir.

**Sabit Hedef Deneyi ( Fixed Target Experiment ):** Hızlandırılmış demetlerin katı, sıvı veya gaz sabit hedeflerle çarpıştırıldığı deneylerdir.

**İkincil Demetler ( Secondary Beams ):** İkincil demet kavramı, bir parçacık demetinin (örn. proton) sabit hedeften saçılması sonucu elde edilen demetler (pion, kaon vb.) için kullanılmaktadır.

### 1.3. Hızlandırıcı Fiziğinde Kullanılan Temel Birim ve Bağlıntılar

Hızlandırıcı fiziğinde enerji birimi elektron volt (eV), momentum birimi ise eV/c olarak kullanılmaktadır.  $E = pc$  olarak bilinir. İyon demetlerinde enerji nükleon başına düşen enerji ile verilir (örn. 100 MeV/n).

Hareketli ve yüklü bir parçacığa elektrik ve manyetik alanların birlikte olduğu bir ortamda Lorentz kuvveti etki eder:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{V} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

Burada elektrik alan kuvveti ivmelenmeyi, manyetik alan kuvveti ise hareket yönüne dik olduğu için kinetik enerjiyi etkilemez ve sadece bükülmeyi sağlar. Bir dairesel hızlandırıcıda, parçacıkların ortalama hızı  $v = \beta c$  ve toplam yük  $Z$  ise demet akımı,

$$i = e \cdot Z \cdot N \cdot f_{rev} \quad (1.2)$$

olarak tanımlanır. Burada  $N$  parçacık sayısı,  $f_{rev}$  ise dolanım frekansıdır.

Doğrusal hızlandırıcılarda ise demet akımı,  $\dot{N}$  demet akısı olmak üzere,

$$i = Z \cdot e \cdot \dot{N} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Boşluğun dielektrik geçirgenliği  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi.c^2} \text{ C/Vm} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/Vm}$  ve boşluğun manyetik alınganlığı ise  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Vs/mA} = 1.2566 \times 10^{-6} \text{ Vs/m}$  ile verilmektedir.

Tablo 1.2. Elektromanyetik niceliklerin CGS ve MKS birim sistemlerinde bağlantıları

	CGS	MKS
Potansiyel	V	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \text{ V}$
Elektrik Alan	E	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \text{ E}$
Akım	I	$i/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
Yük	Q	$q/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
Yük yoğunluğu	$\rho$	$\rho/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
İletkenlik	$\sigma$	$\sigma/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
İndüktans	L	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \text{ L}$
Kapasitans	C	$C/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$
Magnetik Alan	H	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \text{ H}$

#### 1.4. Temel Rölativistik Formülasyon

##### - Lorentz Dönüşümleri

Relativistik hızlara ulaşıldığında iki gözlem çerçevesi arasındaki konum ve zaman dönüşümleri Lorentz dönüşümleri ile ifade edilir. Bir fiziksel olayı normalde eylemsiz kabul edilen laboratuvar çerçevesinde (S) gözlemler ve analiz ederiz ancak bazen örneğin parçacığın eylemsiz kaldığı kendi gözlem çerçevesinden (S\*) izlemek ve analiz etmek kolaylık sağlayabilir. Fiziksel sonuçların gözlem çerçevesinden bağımsız olduğu gerçeğine dayanarak, sonuçlar bir çerçeveden diğerine Lorentz dönüşümleri aracılığı ile kolayca dönüştürülebilir. Böyle iki çerçeve arasındaki konum ve zaman dönüşümleri

Lorentz dönüşümleri olarak Denklem 1.4'te verildiği gibidir. Birbirlerine göre  $s$  doğrultusunda  $v_s$  hızıyla hareket eden  $S$  (eylemsiz laboratuvar) çerçevesi ile  $S^*$  (eylemlili) gözlem çerçeveleri dikkate alınır, bunlar arasında konum ve zaman ile ilgili Lorentz dönüşümleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
 x &= x^* & y &= y^* \\
 s &= \frac{s^* + \beta_s ct^*}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} & ct &= \frac{ct^* + \beta_s s^*}{\sqrt{1 - \beta_s^2}} \\
 \beta_s &= \frac{v_s}{c} & & (1.4)
 \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_s^2}}$$

olarak tanımlanırlar.  $\gamma$  Lorentz faktörü olarak anılır.  $S$  laboratuvar sistemine göre,  $v_s$  hızıyla hareket eden bir  $S^*$  sisteminde gözlenen uzunluk büzülmesi ve zaman genişmesi rölativistik etkinin önemli sonuçlarındandır.

Tablo 1.3.  $S$  ve  $S^*$  arasındaki bazı temel dönüşümler

Uzunluk büzülmesi	$\Delta S^* = \Delta S / \gamma$
Zaman genişmesi	$t^* = \gamma t$
Hacim	$V = \gamma V^*$
Yoğunluk	$\rho = \rho^* / \gamma$

Rölativistik nicelikleri birbirine bağlayan bazı diferansiyel bağıntılar aşağıda verilmiştir:

$$dcp = \frac{mc^2}{\beta} d\gamma = \frac{dE}{\beta} = \frac{dE_{kin}}{\beta}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{c^2}{v^2} \frac{\Delta E}{E}$$

$$\frac{dcp}{cp} = \beta^{-2} \frac{d\beta}{\beta} = \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta} \quad (1.5)$$

$$dcp = \gamma^3 mc^2 d\beta$$

#### - Görelî Enerji ve Momentum

Durgun kütlesi  $m$  olan bir parçacığın durgun enerjisi, görelî toplam enerji, görelî momentumu ve görelî kinetik enerjisi Tablo 1.4' te tanımlanmıştır.

Tablo 1.4. Görelî Enerji, Momentum ve Kinetik Enerji Tanımları

Durgun kütle enerjisi	$E_0 = mc^2$
Toplam görelî enerji	$E = \gamma mc^2$
Görelî momentum	$\vec{p} = \gamma \vec{\beta} mc$
Görelî kinetik enerji	$K =$ $E_{kin} = E - E_0 = mc^2 (\gamma - 1)$



## - Elektromanyetik Alan Dönüşümleri

Elektromanyetik alanlar ve bu alanların yüklü parçacıklarla etkileşimi hızlandırıcı fiziği açısından önemlidir. Alanlar ya parçacık ya da laboratuvar sisteminde ifade edilirler. Alanların bir çerçeveden diğerine dönüşümü alanlara ilişkin Lorentz dönüşümleri ile tanımlanır. Eylemli  $S^*$  çerçevesinin,  $S$  çerçevesine (laboratuvar) göre hareket doğrultusu olan  $s$  eksenini boyunca  $v_s$  hızıyla hareket ettiğini varsayalım. Hareketli referans sistemindeki alanlar  $*$  ile sembolize edilmek üzere, laboratuvar sistemindeki alanlar cinsinden şu şekilde ifade edilirler:

$$E_x^* = \gamma(E_x + \beta_s B_y)$$

$$E_y^* = \gamma(E_y - \beta_s B_x) \quad (1.6)$$

$$E_s^* = E_s$$

$$B_x^* = \gamma(B_x - \beta_s E_y)$$

$$B_y^* = \gamma(B_y + \beta_s E_x) \quad (1.7)$$

$$B_s^* = B_s$$

### 1.5. Demet Dinamiği ve Temel İlkeleri

Demet dinamiği analizi yüklü parçacık demetlerinin dış elektromanyetik alanlar altındaki davranışını konu alır ve hareket denklemlerinin uygun koordinat sisteminde tanımlanmasını ve çözümlenmesini konu alır. Hareket doğrultusundaki dinamik boyuna dinamik olarak bilinir ve daha çok parçacık demeti içinde parçacıklar arasındaki enerji ve faz farklılıklarına dayanır. Boyuna dinamik literatürde “sinkrotron salınımları” veya “longitudinal oscillations” olarak karşımıza çıkar. Enine dinamik ise

hareket yönüne dik düzlem (x,y) içindeki hareket denklemleri ve çözümlerini konu alır. Enine dinamik literatürde “Betatron salınımları” veya “transverse oscillations” olarak da geçmektedir. Özellikle demet yayını ve kalitesi gibi konuların analizinde konum-eğim faz uzayında çalışılır. Kaynağı yükler ve akımlar olan elektrik ve manyetik alanlar ile ilgili yasalar Maxwell denklemleri ile verilir:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r E) = 4\pi\rho \quad (\text{Gauss Yasası})$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (\text{Manyetik Gauss Yasası})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday Yasası}) \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampere Yasası})$$

Genel olarak demet dinamiğinde ilgilendiğimiz ortamlar herhangi bir malzeme içermeyen vakum ortamlardır. Bu yüzden  $\epsilon_r = 1$  ve  $\mu_r = 1$  olarak alınmıştır.

Eşitlik 1.1’ de verilen Lorentz Kuvvetinin parçacığın alanla etkileştiği zaman üzerinden integrali alınır, parçacığın momentumundaki değişimi bulunur.

$$\Delta p = \int F dt \quad (1.9)$$

Diğer taraftan, Lorentz Kuvveti’nin alınan yola göre integrali, parçacığın kinetik enerjisindeki değişimini verir.

$$\Delta E_{kin} = \int F ds \quad (1.10)$$

Eşitlik 1.9 ve 1.10' u karşılaştırılarak ve  $ds = vdt$  ifadesini kullanarak momentum ve kinetik enerji diferansiyelleri arasındaki ilişki bulunur.

$$c\beta dp = dE_{kin} \quad (1.11)$$

Lorentz Kuvveti, 1.10'da yerine yazıldığında ve ikinci integralde  $ds = vdt$  ifadesi kullanıldığında kinetik enerjideki değişim

$$\Delta E_{kin} = q \int E ds + \frac{q}{c} \int (\vartheta x B) \vartheta dt \quad (1.12)$$

olarak bulunur.

Açıkça görülüyor ki; parçacığın kinetik enerjisi sonlu bir E hızlandırıcı alanı varlığında artacak ve ivmelenme E alanı doğrultusunda olacaktır. Bu ivmelenme parçacık hızından bağımsızdır, hızı sıfır olan parçacığa da etkiyecektir. Lorentz Kuvveti'nin ikinci bileşeni parçacığın hızına bağımlıdır ve ilerleme doğrultusu ile manyetik alan doğrultusuna diktir. Bu ikinci terim kinetik enerjii etkilemez; ancak yörüngeyi bükür.

Elektromanyetik alan varlığında yüklü parçacık için hareket denklemi  $q=Ze$  olmak üzere:

$$\frac{d}{dt} p = \frac{d}{dt} (\gamma m \vartheta) = zeE + \frac{e}{c} z(\vartheta x B) \quad (1.13)$$

şeklindedir. Buradaki E ve B alanları skaler ve vektörel potansiyellerden türetilen elektrik ve manyetik alanlardır.

$$E = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$B = \nabla x A \quad (1.15)$$

$$\frac{d}{dt} p = m\gamma \frac{d\vartheta}{dt} + m\vartheta \frac{d\gamma}{dt} \text{ ifadesi}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\beta}{c} \frac{d\vartheta}{dt} \quad (1.16)$$

ile birlikte kullanılırsa;

$$\frac{dp}{dt} = m \left\{ \gamma \frac{d\vartheta}{dt} + \gamma^3 \frac{\beta}{c} \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right) \vartheta \right\} \quad (1.17)$$

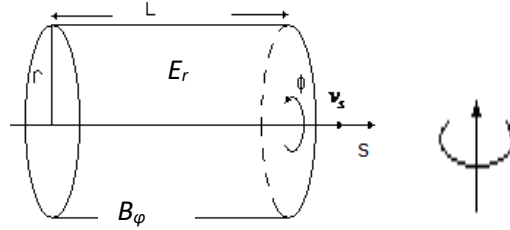
Bağıntı 1.17' de ilk terim kuvvetin parçacık hareketine dik bileşenini ( $\frac{dp_{\perp}}{dt}$ ), ikinci terim ise kuvvetin parçacık hareketine paralel bileşenini ( $\frac{dp_{\parallel}}{dt}$ ) vermektedir.

Yörüngeye paralel ve dik hızlandırma arasındaki fark, hızlandırıcı tasarımını önemli ölçüde etkiler. Daha sonra da görüleceği gibi elektronları hızlandırmanın, yayımlanan sinkrotron ışınımından dolayı bir sınırı vardır. Bununla birlikte bu sınırlama manyetik kuvvetlerin parçacık yayılımına paralel oldukları doğrusal hızlandırıcılarla karşılaştırıldığında, manyetik kuvvetlerin yayılıma dik oldukları dairesel hızlandırıcılarda elektron gibi hafif parçacıklar için çok daha yüksek olmaktadır. Bu tartışma proton ve benzer parçacıklar için de geçerlidir. Ancak sinkrotron ışınımı yoluyla kaybedilen enerji parçacık kütesinin 4. kuvveti ile ters orantılı olduğu için proton, iyon vb. ağır parçacıklar için sinkrotron ışınımı ihmal edilecek düzeyde küçük olarak ortaya çıkar.

## 1.6. Yüklü Parçacık Demetlerinin Kararlılığı

Yoğun demet içindeki parçacıklar ileri düzeyde kararlılık problemlerine sebep olacak şekilde, elektrostatik itme kuvvetlerinin etkisi altında kalabilir. Parçacık demetlerinin uzun yollar boyunca iletimi, bu uzay yükü kuvvetleri kontrol altında tutulmadıkça, oldukça sınırlı ölçülerde olacaktır.

Bütün parçacıkların durgun olduğu bir hacim içinde, bir kısım parçacıkların, diğer parçacıkların itme kuvveti etkisi altında yük merkezinden dışarı kaçmaları beklenebilir. Bu durum açıkça tüm parçacıkların aynı yönde hareket ettiği bir parçacık demetindeki durumdan farklıdır. Bu nedenle bir demetteki yüklü parçacıkların oluşturduğu alan hesaplanır ve bu alanlardan kaynaklanan Lorentz kuvveti türetilir. Laboratuvarında  $\rho_0$  yoğunluklu bir demet varsa;



Şekil 1.1. Laboratuvarında  $\rho_0$  yoğunluklu bir demet için elektrik ve manyetik alan bileşenleri

Gauss Yasası ( $\nabla \cdot E = 4\pi\rho_0$ ) kullanılarak;

$$E_r = 2\pi\rho_0 r \quad (1.18)$$

şeklinde radyal elektrik alanı,

Ampère yasası  $\nabla \times B = \frac{4\pi}{c}\rho_0 v$  kullanılarak;

$$B_\phi = 2\pi\rho_0 \frac{v}{c} r \quad (1.19)$$

manyetik alanı bulunur. Bu alanlar demet tarafından oluşturulur ve demet içindeki parçacığa aşağıda verilen radyal kuvvet etki eder.

$$F_r = e \left( E_r - \frac{v}{c} B_\phi \right) = 2\pi \cdot e \cdot \rho_0 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{2\pi \cdot e \cdot \rho_0}{\gamma^2} r \quad (1.20)$$

- Düşük enerjilerde bu itici kuvvet manyetik alan ile karşılanır.

- Yüksek enerjilerde uzay yükü kuvveti ortadan kalkmaktadır (  $\approx \gamma^{-2}$  ).
- İyon durumunda yük çokluğundan dolayı uzay yükü kuvveti Z kat artacaktır.

Demetin durgun çerçevesinde ( $v = 0$ ,  $F_r = 0$ ) yalnız elektrostatik kuvvetler vardır.

$$\begin{aligned}
 F_r' &= eE_r' = e2\pi\rho_0'r' \\
 F_r &= \frac{dp_r}{dt} \\
 p_\gamma &= p_r' \\
 F' &= \gamma F_r \\
 dt &= \gamma dt' \\
 \rho' &= \frac{\rho}{\gamma}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Radyal kuvvet laboratuvar sisteminde,

$$F_r = 2\pi \cdot e \frac{\rho_0}{\gamma^2} r = \frac{F_r'}{\gamma} \tag{1.22}$$

şeklindedir. Sonuç olarak, rölativistik bir demet kendi alanları etkisi altında kararlıdır. Düşük enerjilerde kararlılığı sağlamak için odaklayıcı dış kuvvetler (diverging forces) kullanmak gerekir.