Adjoint Formlar ve Lagrange Özdeşliği:

$$L = a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x), \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

olmak üzere

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

denklemi ikinci basamaktan, lineer, değişken katsayılı denklemdir.

Bu denklemde $a_1 = a_0'$ oluyorsa denkleme self-adjointtir denir. Eğer bu eşitlik sağlanmıyorsa denklem

$$h(x) = \frac{1}{a_0} \exp\left\{ \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\}$$

integral çarpanıyla çarpılarak self-adjoint hale getirilebilir.

Burada

$$\begin{aligned} p(x) &= \exp\left\{ \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\} \\ q(x) &= \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \exp\left\{ \int^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Lagrange Özdeşliği

$$L = a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x), \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

olmak üzere

$$L[y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$\begin{aligned} za_0y'' &= (za_0y')' - (za_0)'y' = (za_0)''y - ((za_0)'y)' + (za_0y')' \\ za_1y' &= (za_1y)' - (za_1)'y \\ za_2y &= (za_2)y \end{aligned}$$

yazılabilirler. Buradan

$$\begin{aligned} zL\left[y\right] &= (za_0)''y - ((za_0)'y)' + (za_0y')' - (za_1)'y + (za_1y)' + (za_2)y \\ &= \left[(za_0)'' - (za_1)' + (za_2)\right] y + \frac{d}{dx}\left[za_0y' - (za_0)'y + za_1y\right] \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} L^*\left[z\right] &= (za_0)'' - (za_1)' + (za_2) \\ &= a_0z'' + (2a_0' - a_1)z' + (a_0'' - a_1' + a_2)z \end{aligned}$$

tanımını yaparsak

$$zL\left[y\right] - yL^*\left[z\right] \equiv \frac{d}{dx}\left[a_0(y'z - yz') + (a_1 - a_0')yz\right]$$

şeklini alır. Bu ifade L operatörü için Lagrange özdeşliği olarak bilinir. L^* operatörüne L nin adjoint operatörü denir. Ayrıca $L^{**} = L$ dir. Eğer $L^* = L$ ise L ye self-adjoint operatör denir.

Örnek 1. Legendre denklemi olarak bilinen

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

diferensiyel denklemi self-adjoint formdadır. Çünkü

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$$

olarak yazılabilmektedir.

Örnek 2. Laguerre denklemi olarak bilinen

$$xy'' + (1 - x)\,y' + ny = 0$$

diferensiyel denkleminin self-adjoint formu

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right) + e^{-x}ny = 0$$

dır.

Örnek 3.

$$L = a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x), \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

diferensiyel operatörünün adjointi

$$L^* = a_0(x)D^2 + (2a_0'(x) - a_1(x))D + (a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x))$$

olarak tanımlanıyor. Bu durumda $L^{**} = L$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$L^* = a_0(x)D^2 + (2a_0'(x) - a_1(x))D + (a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x))$$

operatörünün adjointini bulalım. $L^* = b_0D^2 + b_1D + b_2$ şeklinde yazalım.

$$\begin{aligned}
L^{**} &= b_0D^2 + (2b_0' - b_1)D + (b_0'' - b_1' + b_2) \\
L^{**} &= a_0D^2 + (2a_0' - 2a_0' + a_1)D + (a_0'' - 2a_0'' + a_1' + a_0'' - a_1' + a_2) \\
L^{**} &= a_0D^2 + a_1D + a_2 = L
\end{aligned}$$

olduğu gösterilmiş olur.