Aykırı (Singüler) Sturm-Liouville Sistemleri:

Eğer bir Sturm-Liouville sisteminde aşağıdaki durumlardan herhangi biri varsa, o sisteme aykırı Sturm-Liouville sistemi denir.

1) Tanım aralığı yarı sonsuz ya da sonsuzdur.

2) $p(x)$ ya da $s(x)$ fonksiyonları verilen aralıkta sıfır yerlerine (köklere) sahiptir.

3) Aralık sonludur fakat katsayılardan en az biri aralığın uçlarından birinde veya her ikisinde sonsuz olur.

Örnek 1.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]+\frac{\lambda}{x}y=0 \quad , \quad 0<x<1\\ &y(1)=0\\ &x\to 0^+ \ \text{ için } y \text{ sonlu}\end{aligned}$$

aykırı Sturm-Liouville sistemini göz önüne alalım. Bu sistem için $p(x)=x$ ve $s(x)=\dfrac{1}{x}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 0^+} s(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ olduğundan verilen sistem bir aykırı Sturm-Liouville sistemidir.

$\lambda>0$ için karakteristik denklemin kökleri $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y(x)=c_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\ln x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln x\right)$$

şeklinde bulunur. Verilen şartlar uygulandığında $c_2\neq 0$ olması durumunda özdeğerler varolup, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\phi(x)=\sin\left(\sqrt{\lambda}\ln x\right)$ şeklinde bulunur.

Örnek 2.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0\\ &y(0)=0\\ &x\to\infty \ \text{ için } y \text{ ve } y'\text{sonlu}\end{aligned}$$

aykırı Sturm-Liouville sistemine ait bütün özdeğer ve özfonksiyonları bulunuz.

Çözüm: Bu sistem için tanım aralığı $[0,\infty)$ olduğundan yarı sonsuzdur. Dolayısıyla verilen sistem bir aykırı Sturm-Liouville sistemidir. Verilen ifadenin karakteristik denklemi $r^2+\lambda=0$ dan $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$ dır.

i) $\lambda>0$ olsun. Bu durumda denklemin kökleri $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right)$$

dir. $y(0) = 0$ ise $c_1 = 0$ dır. Böylece

$$y(x) = c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) \text{ ve } y'(x) = c_2\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right)$$

olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| < \infty \text{ ise } \lim_{x\to\infty} \left|c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right)\right| < \infty$$

olmalıdır. Bu durum her c_2 için sağlanır.

$$\lim_{x\to\infty} |y'(x)| < \infty \text{ ise } \lim_{x\to\infty} \left|c_2\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right)\right| < \infty$$

olmalıdır. Bu durum da her c_2 için sağlanır. Dolayısıyla $c_2 \neq 0$ için $\lambda > 0$ özdeğerler varolup, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise $\phi(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right)$ şeklinde bulunur.

ii) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda denklemin kökleri $r_{1,2} = 0$ olup verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

dir. $y(0) = 0$ ise $c_1 = 0$ dır. Böylece

$$y(x) = c_2 x \text{ ve } y'(x) = c_2$$

olmak üzere

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| < \infty \text{ ise } \lim_{x\to\infty} |c_2 x| < \infty$$

olmalıdır. Bu durum sadece $c_2 = 0$ için sağlanır.

$$\lim_{x\to\infty} |y'(x)| < \infty \text{ ise } \lim_{x\to\infty} |c_2| < \infty$$

olmalıdır. Bu durum da her c_2 için sağlanır. Dolayısıyla $c_2 = 0$ dır. Aşikar çözüm elde edildiğinden $\lambda = 0$ için özdeğer ve özfonksiyon yoktur.

iii) $\lambda < 0$ olsun. Bu durumda yine benzer işlemler yapılırsa $\lambda < 0$ için özdeğer ve özfonksiyon olmadığı görülür.

Salınımlı Çözümler:

$$L\left[y\right] = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0$$

denklemi ve

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0$$
$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0$$

sınır koşulları ile verilen homogen bir sınır değer probleminin herhangi bir $y(x)$ çözümü $[a, b]$ aralığında en az iki sıfır yerine sahip ise $y(x)$ e sistemin $[a, b]$ de bir salınımlı çözümü denir.