Bir Yarı Eksen Üzerinde Salınımlı Çözümler:

$$L\left[y\right]=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0$$

olmak üzere,

Teorem: $0<x<\infty$ yarı sonsuz aralığında $p(x)$ ve $q(x)$ sürekli fonksiyonlar ve de $p(x)>0$ olsun. Eğer aşağıdaki genelleştirilmiş integraller ile ilgili

$$\int_1^\infty \frac{dx}{p(x)}=+\infty \quad , \quad \int_1^\infty q(x)dx=+\infty$$

eşitlikleri geçerli oluyorsa, o takdirde (1) denkleminin her $y(x)$ çözümü $1<x<\infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Benzer şekilde eğer,

$$\int_0^1 \frac{dx}{p(x)}=+\infty \quad , \quad \int_0^1 q(x)dx=+\infty$$

eşitlikleri geçerli oluyorsa, o takdirde (1) denkleminin herbir çözümü $0<x<1$ açık aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir.

Örnek 1. $\dfrac{d}{dx}\left[x^{1/2}.\dfrac{dy}{dx}\right]+x^{-1/2}y=0$ denkleminin çözümlerinin $1<x<\infty$ aralığındaki salınımlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemde $p(x)=x^{1/2}$, $q(x)=x^{-1/2}$ olmak üzere, verilen aralıkta $p(x)$ ve $q(x)$ sürekli olup, $p(x)=x^{1/2}>0$ sağlanır.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{p(x)}=\int_1^\infty q(x)dx=\int_1^\infty x^{-1/2}dx=+\infty$$

olduğundan, Teorem den dolayı verilen denklemin aşikar olmayan her $y(x)$ reel çözümü, $1<x<\infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Bu aralıkta ikiden fazla sıfır yerine sahip çözümler salınımlı olduğundan, bu denklemin çözümleri de salınımlıdır.

Örnek 2. $\dfrac{d}{dx}\left[(3x+2x^{-3})\dfrac{dy}{dx}\right]+\left[\dfrac{\arctan x}{1+x^2}+\dfrac{(\ln x)^3}{x}\right]y=0$ denkleminin reel çözümleri $1<x<\infty$ aralığında salınımlı mıdır? İnceleyiniz.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemde $p(x) = (3x + 2x^{-3})$, $q(x) = \dfrac{\arctan x}{1+x^2} + \dfrac{(\ln x)^3}{x}$ olup $1 < x < \infty$ için $p(x) > 0$ olup $p(x)$ ve $q(x)$ süreklidir.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{p(x)} &= \int_1^\infty \frac{dx}{(3x+2x^{-3})} = +\infty \\ \int_1^\infty q(x)dx &= \int_1^\infty (\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{(\ln x)^3}{x})dx = +\infty\end{aligned}$$

olduklarından Teorem den dolayı, verilen denklemin herbir reel çözümü $1 < x < \infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Dolayısıyla çözümler salınımlıdır.

Örnek 3. $y'' + a^2 y = 0$ denkleminin çözümlerinin $1 < x < \infty$ aralığındaki salınımlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$$y'' + a^2 y = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] + a^2 y = 0$$

olduğundan $p(x) = 1$, $q(x) = a^2$ den $1 < x < \infty$ için $p(x)$ ve $q(x)$ sabit fonksiyonlar olup süreklidir ve $p(x) = 1 > 0$ dır.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{p(x)} &= \int_1^\infty dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t dx = +\infty \\ \int_1^\infty q(x)dx &= \int_1^\infty a^2 dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t a^2 dx = +\infty\end{aligned}$$

sağlandığından, verilen denklemin herbir reel çözümü $1 < x < \infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Dolayısıyla çözümler salınımlıdır.

Örnek 2. $\dfrac{d}{dx}\left[(4x + 3x^{-4})\dfrac{dy}{dx}\right] + (x^3 + 3x^2 + 1)y = 0$ denkleminin reel çözümleri $1 < x < \infty$ aralığında salınımlı mıdır? İnceleyiniz.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemde $p(x) = (4x + 3x^{-4})$, $q(x) = (x^3 + 3x^2 + 1)$ olup

$1 < x < \infty$ için $p(x) > 0$ sağlanır.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{p(x)} &= \int_1^\infty \frac{dx}{(4x+3x^{-4})} = +\infty \\ \int_1^\infty q(x)dx &= \int_1^\infty (x^3+3x^2+1)dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t (x^3+3x^2+1)dx = +\infty\end{aligned}$$

olduğundan yukarıdaki teoremden ötürü, verilen denklemin her bir reel çözümü $1 < x < \infty$ aralığında sonsuz sayıda sıfır yerine sahiptir. Dolayısıyla salınımlıdır.