Bessel Diferensiyel Denklemi

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - k^2\right) y = 0$$

denklemine k-yıncı basamaktan Bessel diferensiyel denklemi denir.

A ve B keyfi sabitler olmak üzere, $k \notin \mathbb{Z}$ için Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_k(x) + BJ_{-k}(x)$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} J_{-k}(x) &= \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-k} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+k}}{(p+k)!p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+k} = (-1)^k J_k(x) \end{aligned}$$

dir. k nın bir tamsayı olması halinde $J_k(x)$ ve $J_{-k}(x)$ fonksiyonları eşitlikten de görüldüğü gibi lineer bağımsız olmayıp aralarında

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

bağıntısı vardır. O halde $k \in \mathbb{Z}$ için ikinci bir lçözüm tanımlanmalıdır. $k \in \mathbb{Z}$ için Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_k(x) + BY_k(x)$$

dir.

Örnek 1. $x^2y'' + xy' + \left(\lambda^2 x^2 - n^2\right) y = 0$ denkleminin genel çözümünün $y(x) = AJ_n(\lambda x) + BJ_{-n}(\lambda x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemde $t = \lambda x$ bağımsız değişken dönüşümünü uygulayalım.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dy}{dt}\right) = \lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

olup, diferensiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - n^2\right) y = 0 \tag{1}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (1) denklemi n inci basamaktan Bessel diferensiyel denklemi olup $n \notin \mathbb{Z}$ için (2) nin genel çözümü,

$$y(t) = AJ_n(t) + BJ_{-n}(t)$$

bulunur. $t = \lambda x$ olduğundan, verilen diferensiyel denklemin genel çözümü,

$$y(x) = AJ_n(\lambda x) + BJ_{-n}(\lambda x)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2. $y'' + \frac{1}{x-\xi} y' + \left(\alpha^2 - \frac{k^2}{(x-\xi)^2}\right) y = 0$ denkleminin genel çözümünü Bessel fonksiyonları cinsinden yazınız.

Çözüm: Soruda verilen denklemin her iki tarafını $(x - \xi)^2$ ile çarpalım.

$$(x-\xi)^2 y'' + (x-\xi)y' + \left(\alpha^2 (x-\xi)^2 - k^2\right) y = 0 \tag{*}$$

denkleminde $\alpha(x - \xi) = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \alpha \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{dy}{dt}\right) = \alpha^2 \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

olup (*) da yerine yazılırsa

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left(t^2-k^2\right)y=0 \tag{1}$$

$k-$yıncı basamaktan Bessel diferensiyel denklemi elde edilir. $k\notin\mathbb{Z}$ olmak üzere (1) in genel çözümü

$$y(t)=AJ_k(t)+BJ_{-k}(t)$$

dır. $\alpha(x-\xi)=t$ olmak üzere soruda verilen denklemin genel çözümü

$$y(x)=AJ_k(\alpha(x-\xi))+BJ_{-k}(\alpha(x-\xi)),\ k\notin\mathbb{Z}$$

olarak bulunur.