Bazı Özel Bessel Fonksiyonları:

$J_k(x)$ in tanımında $k=0$ ve $k=1$ alındığında,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2}\frac{x^4}{2^4} - \frac{1}{(3!)^2}\frac{x^6}{2^6} + ... + (-1)^p \frac{1}{(p!)^2}\frac{x^{2p}}{2^{2p}} + ... \\ J_1(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!}\frac{x^3}{2^3} + \frac{1}{2!3!}\frac{x^5}{2^5} - ... + (-1)^p \frac{1}{p!(p+1)!}\frac{x^{2p+1}}{2^{2p+1}} + ... \end{aligned}$$

Burada

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$$

eşitliği gerçeklenir.

Özel Bessel fonksiyonlarından diğer ikisi de $J_{1/2}(x)$ ve $J_{-1/2}(x)$ olup,

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2^{p+1}}{p!1.3.5...(2p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} J_{-1/2}(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2^{p}}{p!1.3.5...(2p-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 1. $J_{3/2}(x)$ ve $J_{-3/2}(x)$ ifadelerinin sonlu değerini bulunuz.

Çözüm: f) de $p = 1$ alalım. Buna göre,

$$J_k(x) = \frac{x}{2k}\left[J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)\right] \tag{1}$$

olup son eşitlikte $k = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$xJ_{3/2}(x) = J_{1/2}(x) - xJ_{-1/2}(x)$$

bulunur. **g)** den dolayı

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

elde edilir.

(1) de $k = -\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$xJ_{-3/2}(x) = -\left[\frac{1}{x}J_{-1/2}(x) + J_{1/2}(x)\right]$$

bulunur. **g)** den dolayı

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

elde edilir.

Örnek 2. $J_{-7/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(1 - 15x^{-2})\sin x + (6x^{-1} - 15x^{-3})\cos x\right]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:f) de $p = 1$ alalım. Buna göre,

$$J_k(x) = \frac{x}{2k}\left[J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)\right] \tag{1}$$

olup (1) de $k = -\frac{3}{2}$ alınırsa,

$$J_{-3/2}(x) = -\frac{x}{3}\left[J_{-5/2}(x) + J_{-1/2}(x)\right]$$

den

$$J_{-5/2}(x) = -\left[\frac{3}{x}J_{-3/2}(x) + J_{-1/2}(x)\right]$$

bulunur. Bir önceki sorudan $J_{-3/2}(x)$ in ve $J_{-1/2}(x)$ değerini biliyoruz.

$$\begin{aligned} J_{-5/2}(x) &= -\left[\frac{3}{x}(-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{\cos x}{x}+\sin x\Big))+\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[-\frac{3}{x^2}\cos x-\frac{3}{x}\sin x+\cos x\right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(1-\frac{3}{x^2})\cos x-\frac{3}{x}\sin x\right] \qquad (2) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de (1) de $k=-\frac{5}{2}$ alınırsa,

$$J_{-5/2}(x)=-\frac{x}{5}\left[J_{-7/2}(x)+J_{-3/2}(x)\right]$$

den

$$J_{-7/2}(x)=-\left[\frac{5}{x}J_{-5/2}(x)+J_{-3/2}(x)\right]$$

bulunur. (2) den

$$J_{-7/2}(x)=-\left[\frac{5}{x}(-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(1-\frac{3}{x^2})\cos x-\frac{3}{x}\sin x\right])-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big(\frac{\cos x}{x}+\sin x\Big)\right]$$

olmak üzere ara işlemler yapılırsa

$$J_{-7/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[(1-15x^{-2})\sin x+(6x^{-1}-15x^{-3})\cos x\right]$$

olduğu görülür.