Bessel Fonksiyonlarının Dikliği ve Normu:

α reel bir sabit olmak üzere $u = J_k(\alpha x)$ Bessel fonksiyonu için $u = J_k(\alpha x) \Rightarrow u' = \alpha J_k'(\alpha x)$, $u'' = \alpha^2 J_k''(\alpha x)$ olup

$$x^2 u'' + x u' + \left(\alpha^2 x^2 - k^2\right) u = 0$$

diferensiyel denklemini sağlar.

Buna göre $f_n(x) = \sqrt{x} J_k(\alpha_n x)$, $n = 1, 2, ...$ olarak tanımlanırsa bu fonksiyonlar $(0,1)$ aralığında dik bir sistem teşkil ederler. Yani,

$$(f_m, f_n) = \int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = \int_0^1 x J_k(\alpha_m x) J_k(\alpha_n x) dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

dir.

Bessel Serileri:

$[0,1]$ aralığında sürekli ve de bu aralıkta sonlu sayıda ekstremuma sahip bulunan bir $f(x)$ fonksiyonu, k-yıncı basamaktan Bessel fonksiyonları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_k(\alpha_n x)$$

şeklinde bir seriye açılabilir. Burada A_n katsayıları,

$$A_n = \frac{2}{J_{k+1}^2(\alpha_n)} \int_0^1 x f(x) J_k(\alpha_n x) dx$$

şeklindedir.

Modifiye Bessel Fonksiyonları:

$$x^2 y'' + x y' - \left(x^2 + k^2\right) y = 0$$

denklemine k$-$yıncı basamaktan modifiye Bessel denklemi denir. Bu denklemin çözümü $k \in \mathbb{Z}$ iken,

$$y = A I_k(x) + B I_{-k}(x)$$

ve $k \notin \mathbb{Z}$ iken

$$y = AI_k(x) + BK_k(x)$$

şeklindedir. Burada $I_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!\Gamma(n+k+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+k}$ dır.

Örnek 1. $J_0(\alpha_n) = 0,\ n = 1, 2...$olmak üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonunu sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonları cinsinden seriye açınız.

Çözüm:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_o(\alpha_n x),\ k = 0$$

olmak üzere,

$$A_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 x x^2 J_0(\alpha_n x) dx$$

şeklindedir.

$$\frac{d}{dx}\left[x^k J_k(px)\right] = p x^k J_{k-1}(px)$$

rekürans bağıntısında $k = 1$, $p = \alpha_n$ alınırsa,

$$x J_0(\alpha_n x) = \frac{1}{\alpha_n} \frac{d}{dx} \left[x J_1(\alpha_n x)\right]$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 x^2 \frac{d}{dx} \left[x J_1(\alpha_n x)\right] dx \\ &= \frac{2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)} \left\{ x^3 J_1(\alpha_n x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^2 J_1(\alpha_n x) dx \right\} \\ &= \frac{2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)} \left\{ J_1(\alpha_n) - 2\int_0^1 x^2 J_1(\alpha_n x) dx \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar

$$\frac{d}{dx}\left[x^k J_k(px)\right] = p x^k J_{k-1}(px)$$

rekürans bağıntısında $k = 2$, $p = \alpha_n$ alınırsa,

$$x^2 J_1(\alpha_n x) = \frac{1}{\alpha_n}\frac{d}{dx}\left[x^2 J_2(\alpha_n x)\right]$$

bulunur ki buradan

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\left\{J_1(\alpha_n) - \frac{2}{\alpha_n}\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x^2 J_1(\alpha_n x)\right] dx\right\} \\ &= \frac{2}{\alpha_n J_1^2(\alpha_n)}\left\{J_1(\alpha_n) - \frac{2}{\alpha_n} J_2(\alpha_n)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$J_2(\alpha_n) = \frac{2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n)$$

olduğundan,

$$A_n = \frac{2}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}\left\{\alpha_n^2 - 4\right\}$$

bulunur. Böylece

$$x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 - 4}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} J_o(\alpha_n x)$$

serisi elde edilir.