Legendre Diferensiyel Denkleminin Çözümü:

$$\left(1-x^2\right) y''-2xy'+k(k+1)y=0$$

denklemine k−yıncı basamaktan Legendre diferensiyel denklemi denir. Bu denklemin lineer bağımsız çözümlerinden elde edilen Legendre polinomları,

$$P_k(x)=\sum_{n=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}(-1)^n\frac{(2k-2n)!}{2^k n!(k-n)!(k-2n)!}x^{k-2n}$$

şeklindedir. Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonu,

$$F(x,t)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

olmak üzere,

$$F(x,t)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

biçimindedir.

Örnek 1. $u=P_n(\cos\theta)$ fonksiyonunun $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}-\cos\theta\dfrac{du}{d\theta}+n(n+1)u=0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $t=\cos\theta$ değişken dönüşümünü yapalım. Buna göre

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\theta} &= -\sin\theta\frac{du}{dt}\\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \sin^2\theta\frac{d^2u}{dt^2}-\cos\theta\frac{du}{dt}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikler verilen diferensiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2u}{dt^2}-2t\frac{du}{dt}+n(n+1)u=0$$

denklemi elde edilir. Son denklemin bir çözümü $u=P_n(t)$ olup, $t=\cos\theta$ dönüşümünden verilen denklemin bir çözümü $u=P_n(\cos\theta)$ olarak bulunur.

Örnek 2. $y = P_n(e^t)$ fonksiyonunun $\dfrac{d}{dt}\left(\sinh t \dfrac{dy}{dt}\right) = \dfrac{1}{2} n(n+1) e^t y$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x = e^t$ değişken dönüşümünü yapalım. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= e^t \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= e^{2t} \frac{d^2y}{dx^2} + e^t \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikler verilen diferensiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(1 - x^2\right) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

Legendre diferensiyel denklemi elde edilir. Legendre denklemin bir çözümü $y = P_n(x)$ olup, $x = e^t$ dönüşümünden verilen denklemin bir çözümü $y = P_n(e^t)$ olarak bulunur.

Örnek 3. Legendre polinomları için aşağıdaki bağıntıların gerçeklendiğini gösteriniz.

$a)$ $P_k(1) = 1$

$b)$ $P_k(-1) = (-1)^k$

Çözüm: $a)$ Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonu

$$\left(1 - 2xt + t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) t^k$$

olmak üzere bu eşitlikte $x = 1$ alalım.

$$\begin{aligned} \left(1 - 2t + t^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(1) t^k \\ \left((1 - t)^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(1) t^k \\ \frac{1}{1-t} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(1) t^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(1) t^k \end{aligned}$$

olup t^k nın katsayılarını eşitlersek $P_k(1) = 1$ elde edilir.

$b)$ Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonunda $x = -1$ alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left(1+2t+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-1)t^k \\
\left((1+t)^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-1)t^k \\
\frac{1}{1+t} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-1)t^k \\
\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(-1)t^k
\end{aligned}$$

olup t^k nın katsayılarını eşitlersek $P_k(-1) = (-1)^k$ elde edilir.