Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+...$$

serisi hipergeometrik seri adı verilir. Burada α,β ve γ reel ya da kompleks sabitlerdir.

α reel ya da kompleks bir sayı, r sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_r=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+r-1)$$

şeklinde tanımlanan $(\alpha)_r$ ifadesine Pochhammer sembolü denir.

Bu sembol aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $(\alpha)_r=\dfrac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$

2) $(\alpha)_{r+1}=\alpha(\alpha+1)_r$

Pochhammer sembolü gözönüne alınarak hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}x^r$$

şeklinde yazılabilir.

Hipergeometrik seri aşağıdaki koşulları sağlamaktadır.

1) $F(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\beta,\alpha;\gamma;x)$

2) $\dfrac{d}{dx}F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;x)$

3) $F(\alpha,\beta;\gamma;0)=1$

4) $F'(\alpha,\beta;\gamma;0)=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$

Gauss Diferensiyel Denklemi

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\, y' - \alpha\beta y = 0$$

Gauss diferensiyel denkleminin $x = 0$ düzgün aykırı noktası komşuluğundaki çözümü

$$y = AF(\alpha,\beta;\gamma;x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; x) \quad , \quad |x| < 1$$

şeklindedir.

$$(Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + Fy = 0$$

denkleminde eğer $B^2 - 4AC > 0$ ise y'' nün katsayısı birbirinden farklı iki reel köke sahip olacaktır. Bu kökler x_1 ve x_2 olsun.

$$(x - x_1)(x - x_2)y'' + (mx + n)y' + \lambda y = 0$$

denkleminde $u = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ dönüşümü yapılırsa $x = x_1$ noktası komşuluğunda bir çözüm elde edilir. $u = \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}$dönüşümü yapılırsa $x = x_2$ noktası komşuluğunda bir çözümü elde edilir ve diferensiyel denklemimiz ise

$$u(1-u)\frac{d^2y}{du^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)u]\,\frac{dy}{du} - \alpha\beta y = 0$$

şekline dönüşür.

Kummer Denklemi ve Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonları:

$$xy'' + (\beta - x)y' - \alpha y = 0$$

diferensiyel denklemine Kummer Denklemi ya da Konfluent Hipergeometrik Denklemi adı verilmektedir. Burada α, β reel ya da kompleks parametrelerdir. Kummer denkleminin genel çözümü

$$y = AF_1(\alpha;\beta,x) + Bx^{1-\beta}F_1(\alpha-\beta+1; 2-\beta; x)$$

şeklindedir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

Örnek 1. α herhangi bir sayı, n ler bir doğal sayı olmak üzere aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $(-\alpha)_n = (-1)^n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} n!$

b) $(\alpha + k)_{n+1} = (\alpha + k)(\alpha + k + 1)_n$

Çözüm: **a**)

$$\begin{aligned}
(-\alpha)_n &= (-\alpha)(-\alpha+1)...(-\alpha+n-1) \\
&= (-1)^n(\alpha)(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\frac{(\alpha-n)!}{(\alpha-n)!}\frac{n!}{n!} \\
&= (-1)^n\frac{\alpha!}{n'!(\alpha-n)!}n! \\
&= (-1)^n\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} n!
\end{aligned}$$

elde edilir.

b)

$$\begin{aligned}
(\alpha+k)_{n+1} &= (\alpha+k)(\alpha+k+1)...(\alpha+k+n) \\
&= (\alpha+k)\left[(\alpha+k+1)(\alpha+k+1+1)...(\alpha+k+1+n-1)\right] \\
&= (\alpha+k)(\alpha+k+1)_n
\end{aligned}$$

bulunur.