MATEMATİKSEL MODELLEMENİN TEMELLERİ

MATEMATİKSEL MODELLEME

Giriş ve çıkış değişkenleri arasında oluşturulan ilişkiye Model adı verilmektedir.

Prosesler diferansiyel denklemlerle ifade edilecek ve diferansiyel denklemin mertebesine göre adlandırılacaktır.

- Yatışkın Hal *(Steady State)*
  - ★ Noktasal özelliklerin (T, P, C, V, h, ...)zamanla değişmemesi

    (Gıda Prosesleri genelde yatışkın koşulda işletilirler)
- Yatışkın Olmayan Hal **(Unsteady State)**
  - ★ Noktasal özelliklerin zamanla değişmesi
    - **İşletmeye alma** *(Start-up)*
    - **İşletmeyi durdurma** *(Shut-down)*
    - **Kesikli** *(Batch)* **prosesler**
- Proses Dinamiği *(Process Dynamics, transients)*
  - ★ Giriş değişkenlerindeki bir değişime karşılık prosesin ne şekilde ve ne kadar çok tepki verdiğidir. Prosesin zamanla davranışıdır.

    Bu tepki (yanıtım)***(response);***
    - **girdinin özelliklerine**
    - **prosesin karakteristiklerine**

Modellerin sınıflandırılması

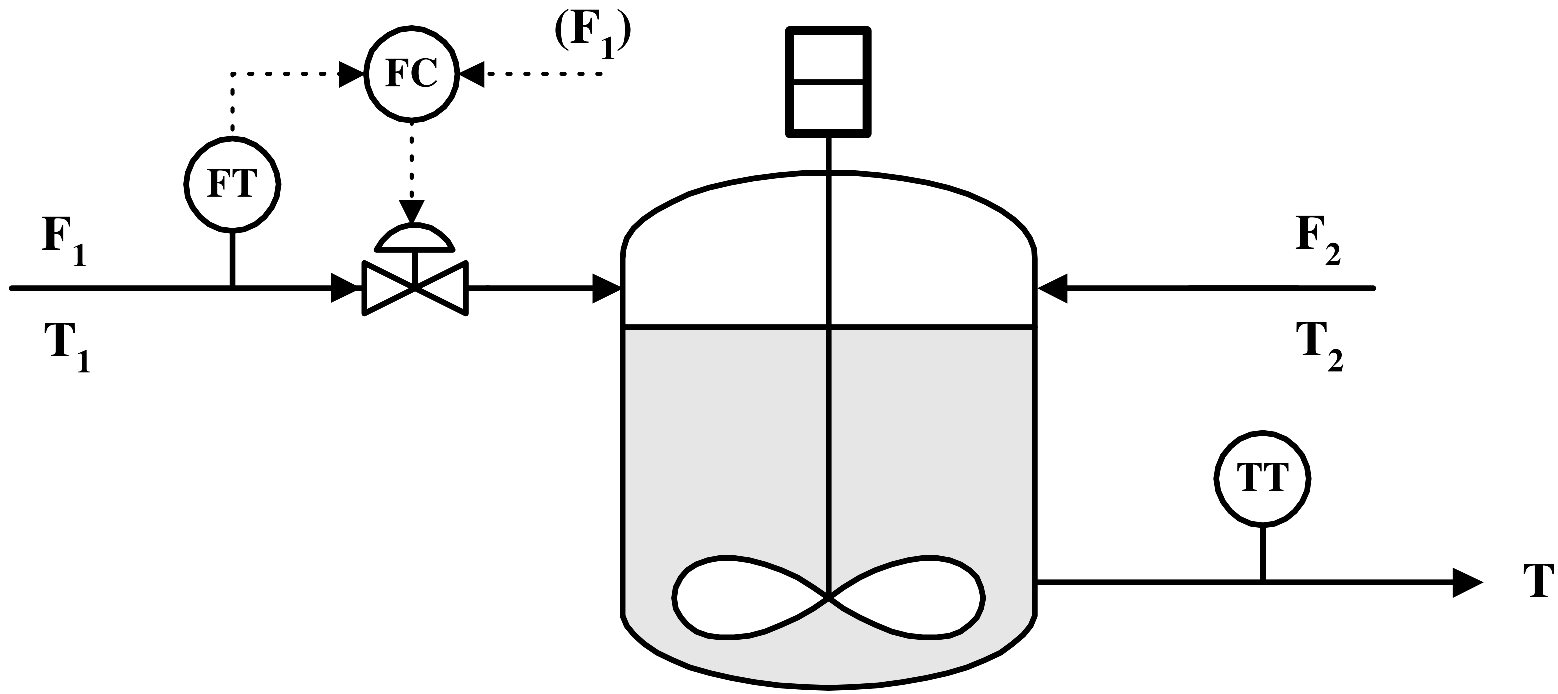
- **(Yığın) Lumped parametre modeller**- Bağımlı değişkenin noktadan noktaya değişmediğini kabul eder, Ö*rn; çok iyi karıştırmalı bir kap*

-Makroskopik (Toplam) Denge kurmak Gerekir.

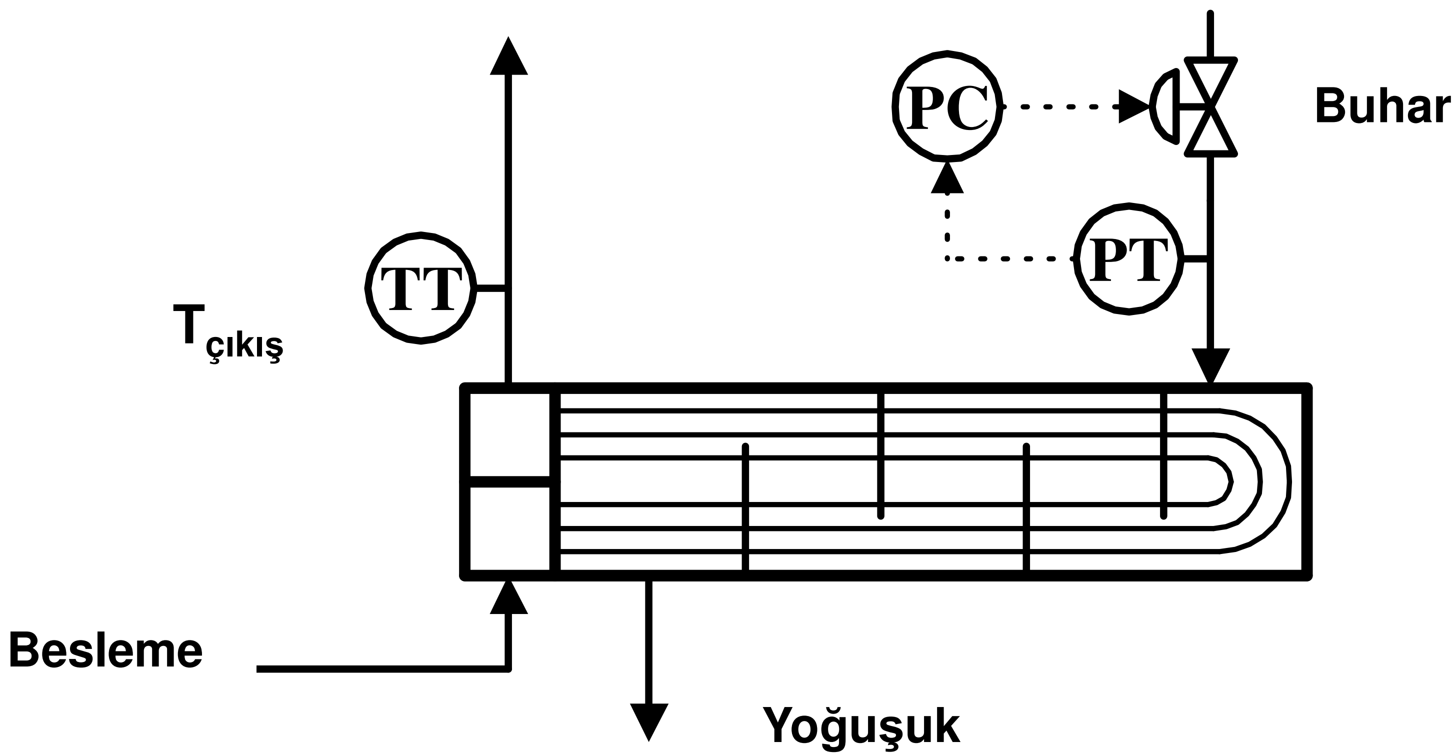
- **(Dağılımlı) Distributed parametre modeller**- Bağımlı değişkenin noktadan noktaya değiştiğini kabul eder.

-Mikroskopik (Bileşen) Denge Kurmak Gerekir.

Yığın Proses Modellere Örnek;



Dağılımlı Parametre Proseslere Örnek;

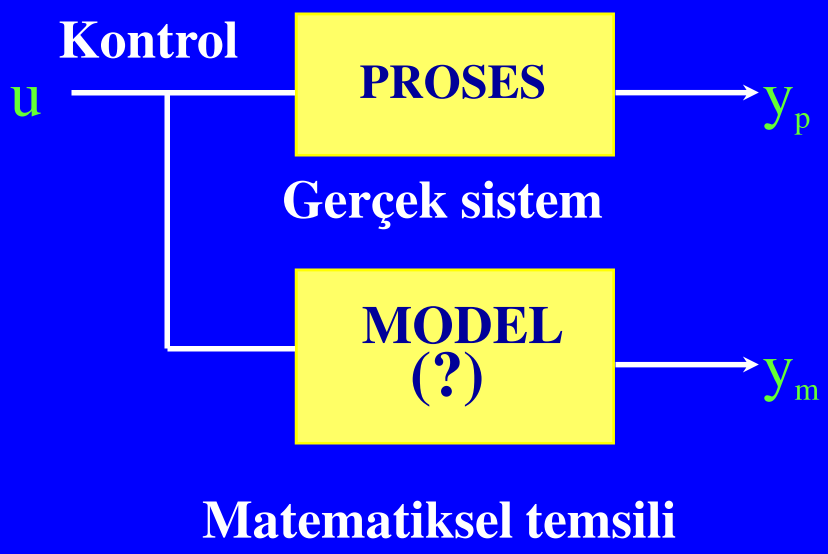


MATEMATİKSEL MODELLEME

- Model prosesi en iyi şekilde temsil etmeli

Teorik olarak;

- dinamik karakteristikler aynı ve
- $y_m = y_p$ olmalı



Matematiksel Modellemede Temel Yaklaşım, Korunum Esitliklerini Kullanmaktır

- Kütle Denkliği

Kütle Birikim Hızı = (Kütle Giriş Hızı) + (Kütle Oluşum Hızı) - (Kütle Çıkış Hızı)

- Enerji Denkliği

Enerji Birikim Hızı = (Enerji Giriş Hızı) + (Enerji Oluşum Hızı) - (Enerji Çıkış Hızı)

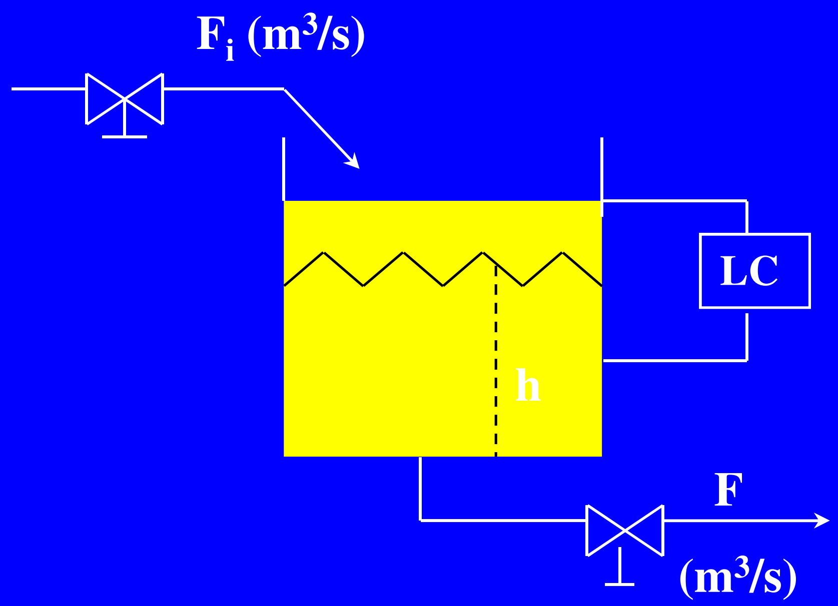
- Momentum Denkliği

(Momentum Birikim Hızı) = (Momentum Giriş Hızı) + (Hacim Elemanına Uygulanan Kuvvetler) - (Momentum Çıkış Hızı)

Ayrıca; Kinetik Hız Denklikleri, Termodinamik Yasalar, Kimyasal ve Fiziksel Denge Eşitlikleri, Newton Viskozite Yasası, Aktarım Eşitlikleri (Kondüksiyon → Fourier, Difüzyon → Fick yasaları..)

ÖRNEK 1: Sıvı Seviye Sistemi

Problem: Tanktaki sıvı seviyesini kontrol etmek.



Çıkış Değişkeni: h

Giriş Değişkenleri: F_i, F

Ayar Değişkeni: ?

Kontrol sistemi farklı şekillerde konfigüre edilebilir.

➔ Tank kesit alanı A_c= Sabit

Proses modeli de buna göre farklı olacaktır.

1. Konfigürasyon:

Ayar Değişkeni: Sıvı Çıkış Hızı

Kütle denkliği yeterli

Yatışkın olmayan hal;

Sıvı birikim hızı = Giriş hızı - Çıkış hızı

$$\frac{d(\rho\, A_c\, h)}{dt} = \rho\, F_i - \rho\, F \qquad \rho\ ,\ A_c \text{ sabit}$$

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - F \qquad \text{.........................} \quad (1)$$

Yatışkın hal;

$$0 = F_{is} - F_s \qquad \text{.........................} \quad (2)$$

(s : Yatışkın hal değerini gösterir)

Denklem (2)'yi Denklem (1)'den çıkaralım;

$$A_c \frac{dh}{dt} = (F_i - F_{is}) - (F - F_s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sapma Değişkenleri *(Deviation Variables)*

- $y = h - h_s$
- $d = F_i - F_{is}$
- $u = F - F_s$ tanımlanırsa,

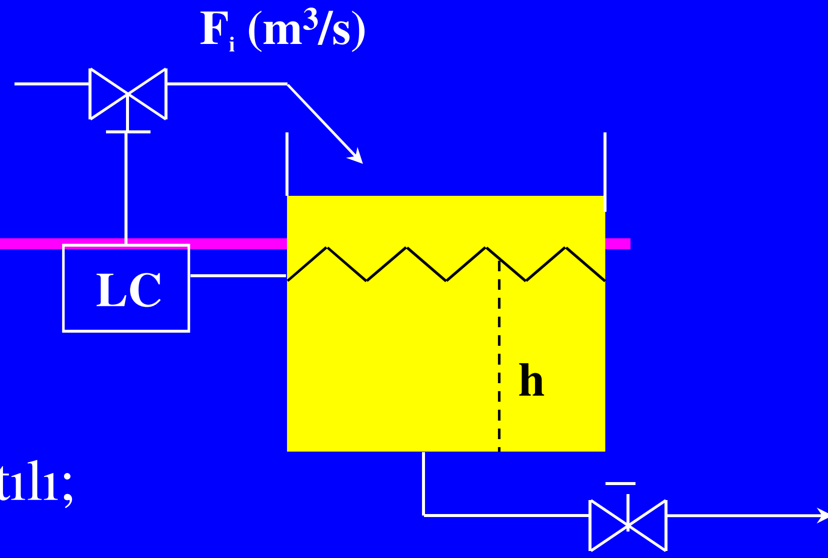
Proses modeli:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{1}{A_c} d - \frac{1}{A_c} u}$$

Proses değişkeninin (y), düzensizliklere (d) ve kontrol eylemine (u) bağlılığını gösterir.

2. Konfigürasyon:

- Ayar değişkeni: Sıvı giriş hızı



$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - F$$

Bu kez F, sıvı seviye yüksekliği ile orantılı;

$F = ch$ varsayalım,

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - ch \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$0 = F_{is} - ch_s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Denklem (5)'i denklem (4)'den çıkaralım;

$$A_c \frac{dh}{dt} = (F_i - F_{is}) - c\,(h - h_s) \ \ldots\ldots \quad (6)$$

Sapma değişkenleri cinsinden proses modeli:

$$y = h - h_s \text{ , } u = F_i - F_{is}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + \frac{c}{A_c} y = \frac{1}{A_c} u}$$

Çıkış degişkenin giriş değişkenine bağlılığını gösterir.

Aslında; $F = c\, h^{1/2}$ dir.

Lineer değil !

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - F$$

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - c\sqrt{h}$$

Nonlineer

Doğrusallaştırma gerekecek…

DOĞRUSALLAŞTIRMA

- Nonlinear bir modeldeki her terim, işletme noktası (yatışkan hal) etrafında doğrusallaşır.
  - ➔ Model, sadece doğrusallaştırma yapılan nokta çevresinde geçerli olur.

Taylor Açılımı:

Tek değişkenli fonksiyon, x_s etrafında

$$F(x) = F(x_s) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_s} (x - x_s) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_s} (x - x_s)^2 + R$$

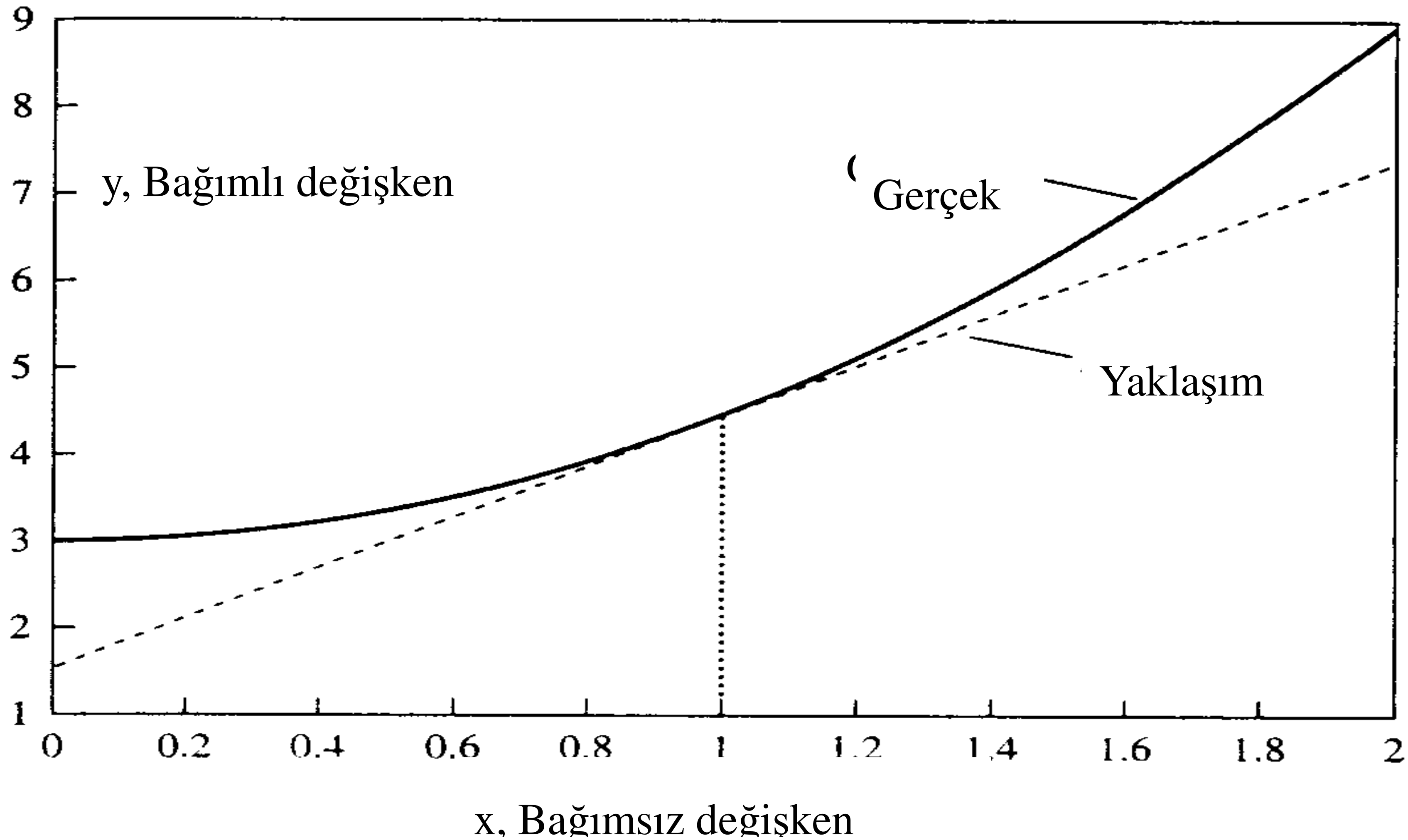
İki değişkenli fonksiyon, x_s etrafında

$$F(x_1, x_2) = F(x_{1s}, x_{2s}) + \left.\frac{dF}{dx_1}\right|_{x_{1s},\, x_{2s}} (x_1 - x_{1s}) + \left.\frac{dF}{dx_2}\right|_{x_{1s},\, x_{2s}} (x_2 - x_{2s})$$

$$+ \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F}{dx_1^2}\right|_{x_{1s},\, x_{2s}} (x_1 - x_{1s})^2 + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2F}{dx_2^2}\right|_{x_{1s},\, x_{2s}} (x_2 - x_{2s})^2$$

$$+ \frac{d^2F}{dx_1\, dx_2} (x_1 - x_{1s})(x_2 - x_{2s}) + R$$

Nonlineer bir fonksiyon ve bir x_s = 1 noktası etrafındaki doğrusal yaklaşımı



$y=1.5x^2 + 3$ fonksiyonu ve x_s = 1 noktasındaki lineer yaklaşımı

ÖRNEK LER (Doğrusallaştırma):

$$F(x) = x^{1/2} \qquad F(x) = x_s^{1/2} + \frac{1}{2} x_s^{-1/2} (x - x_s)$$

$$F(x) = \frac{x}{1 + ax} \qquad F(x) = \frac{x_s}{1 + ax_s} + \frac{1}{(1 + ax_s)^2} (x - x_s)$$

Tanktaki sıvı seviye kontrolu örneğine (2. konfigürasyon) geri dönelim..

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - F$$

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - c\sqrt{h}$$

Nonlineer

Bir h_s yatışkın hali etrafında doğrusallaştırma:

$$c\sqrt{h} \approx c\sqrt{h_s} + \left.\frac{d(ch^{1/2})}{dh}\right|_{h = h_s} (h - h_s)$$

$$c\sqrt{h} \approx c\sqrt{h_s} + \frac{c}{2\sqrt{h_s}} (h - h_s)$$

Yukarı taşınırsa;

$$A_c \frac{dh}{dt} = F_i - c\sqrt{h_s} - \frac{c}{2\sqrt{h_s}} (h - h_s)$$

Yatışkın hal: $0 = F_{is} - c\sqrt{h_s}$

$(h = h_s,\ F_i = F_s)$

Birbirinden çıkarılırsa,

$$A_c \frac{dh}{dt} = (F_i - F_{is}) - \frac{c}{2\sqrt{h_s}} (h - h_s)$$

Sapma değişkenleri:

$$y = h - h_s$$

$$u = F_i - F_{is}$$

$$A_c \frac{dy}{dt} = u - \frac{c}{2\sqrt{h_s}}\, y$$

$$\boxed{A_c \frac{dy}{dt} + \frac{c}{2\sqrt{h_s}}\, y = u}$$

Daha gerçekçi bir model...

Diferansiyel denklemin çözümü

$$L\left[\frac{dy}{dt} + \frac{c}{A_c} y\right] = L\left[\frac{1}{A_c} u\right]$$

(2. konfigürasyon)

$$s\,y(s) + \frac{c}{A_c} y(s) = \frac{1}{A_c} u(s)$$

$$\underbrace{\left(\frac{A_c}{c}\right)}_{\tau} s\,y(s) + y(s) = \frac{1}{c} u(s)$$

$$(\tau s + 1)\, y(s) = \frac{1}{c} u(s)$$

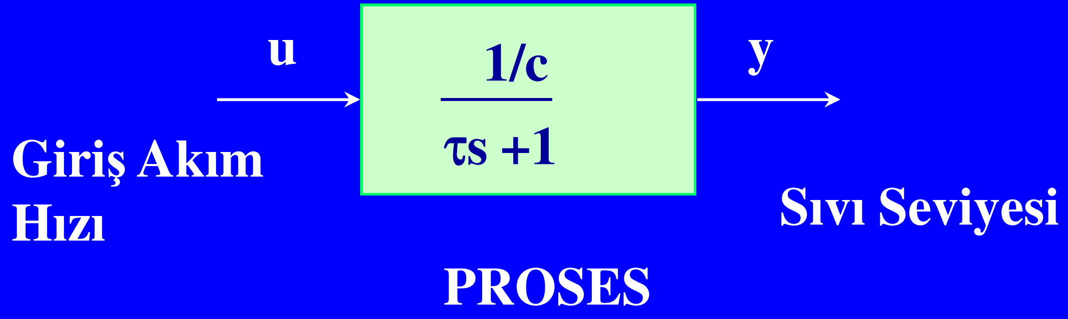
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1/c}{\tau s + 1}$$

Transfer Fonksiyonu

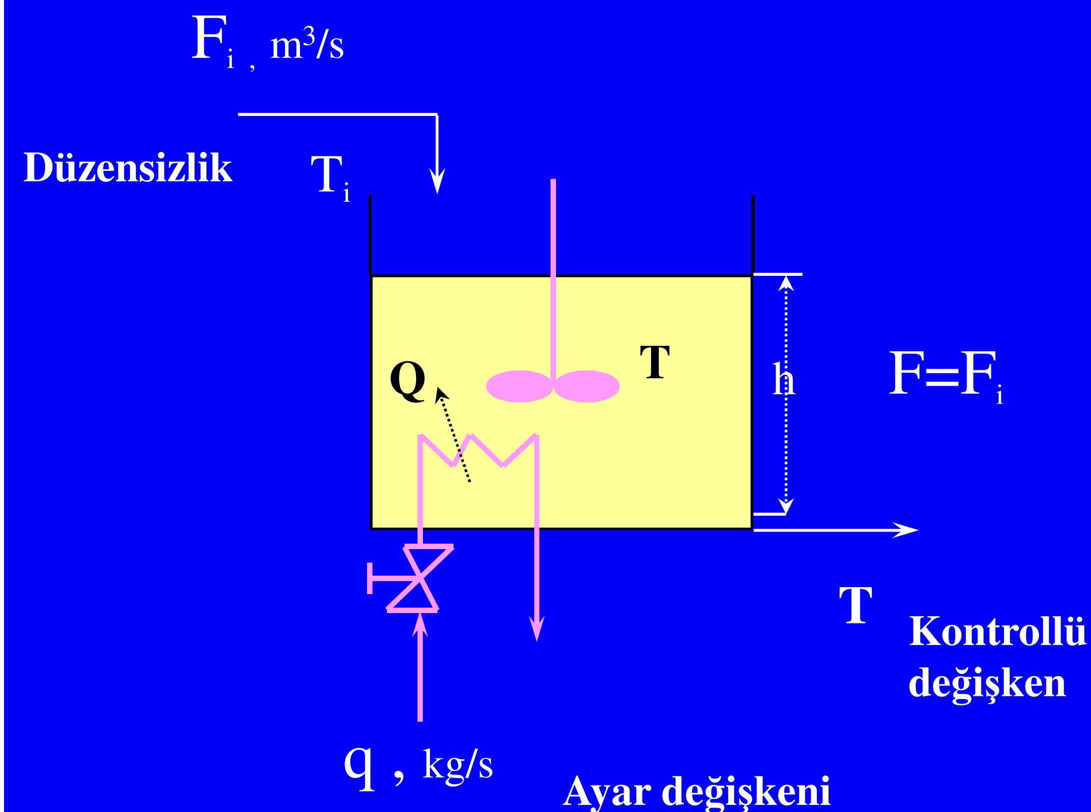
- Çıktının L dönüşümünün girdinin L dönüşümüne oranı.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1/c}{\tau s + 1}$$

(Sıvı seviye sistemi için)



ÖRNEK 2: Karıştırmalı Tank Isıtıcı



GİRİŞ DEĞİŞKENLERİ

q : Ayar değişkeni (q_{buhar})

T_i : Düzensizlik

ÇIKIŞ DEĞİŞKENLERİ

T : Kontrollü değişken

$$\frac{dy}{dt} + \frac{F}{V}\,y = \frac{\lambda}{\rho\, V\, C_p}\,u + \frac{F}{V}\,d$$

Sapma değ. : $y = T - T_s$, $u = q - q_s$, $d = T_i - T_{is}$

Her iki tarafın $\mathcal{L}$ dönüşümü alınırsa,

$$s\,y(s) + \frac{F}{V}\,y(s) = \frac{\lambda}{\rho\, V\, C_p}\,u(s) + \frac{F}{V}\,d(s)$$

$$\left(\frac{V}{F}s + 1\right) y(s) = \frac{\lambda}{\rho\, F\, C_p}\,u(s) + d(s)$$

$$y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\, u(s) + \frac{1}{\tau s + 1}\, d(s)$$

$$\tau = \frac{V}{F} \quad , \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho\, F\, C_p}$$

Blok diyagram;