Laplace Dönüşümleri

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

- Gıda mühendisliğinde ve proses kontrolde sistemi tanımlayan birçok matematiksel modeller kullanılır.

- Bu modelleri çözerken sıklıkla diferansiyel denklem çözümleri yapılır.

- Laplace dönüşümleride **diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemler haline getirilmesini** sağlar ve kontrol hesaplamalarında büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

TANIM

f(t) gibi t'ye bağımlı bir fonksiyonun laplace dönüşümü aşağıda verilmiştir.

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt$$

f(s) fonksiyonu f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. Laplace dönüşümlerinin farklı gösterim şekilleri vardır.

$$f(s) = L\{f(t)\} = F(s) = \overline{f(s)} = Y(s)$$

Yukarıdaki tanıma bir örnek olarak f(t) = 1 ‘in Laplace dönüşümü alalım.

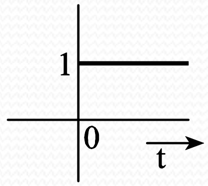
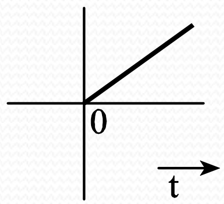
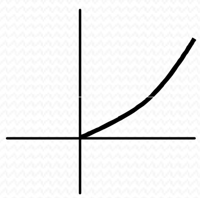
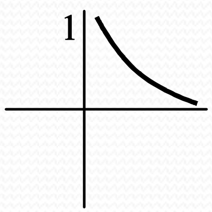
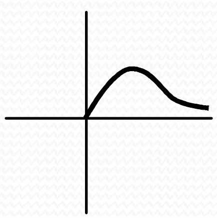
$$f(s)=\int_{0}^{\infty}(1)\,e^{-st}dt=-\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_{0}^{\infty}=-0+\frac{e^{-s*0}}{s}=\frac{1}{s} \qquad (2.3)$$

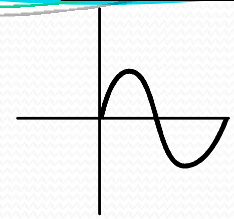
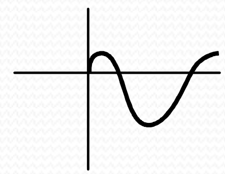
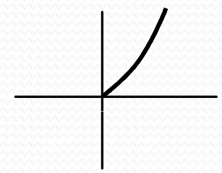
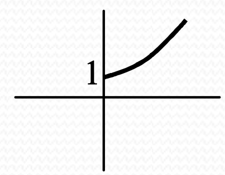
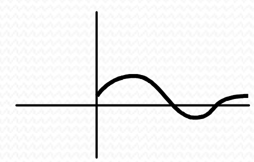
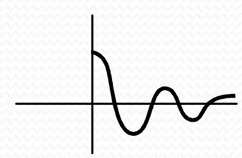
$$\boxed{L\{1\}=\frac{1}{s}} \qquad (2.4)$$

Görüldüğü gibi f(t)=1 fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$f\{s\}=\frac{1}{s}$$ ‘dir.

- Diferansiyel eşitliklerin çözümünde:
  - Önce Laplace dönüşümü uygulanır
  - Daha sonra denklemden Y(s) elde etmek için cebirsel çözüm yapılır
  - En son tekrar ters laplace alınarak istenilen sonuç bulunur
- Laplace dönüşümlerinde rahatlık sağlaması için tablolar oluşturulmuştur.

FONKSİYON	GRAFİK	DÖNÜŞÜM
1		$1/s$
t		$1/s^2$
t^n		$\dfrac{n!}{s^{n+1}},\quad n=0,1,2,\ldots$
e^{-at}		$\dfrac{1}{s+a}$
$t^n . e^{-at}$		$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

FONKSİYON	GRAFİK	DÖNÜŞÜM
$\sin kt$		$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$\cos kt$		$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$\sinh kt$		$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$\cosh kt$		$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
$e^{-at}\sin kt$		$\dfrac{k}{(s+a)^2+k^2}$
$e^{-at}\cos kt$		$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+k^2}$

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

1. Laplace dönüşümleri uygulandığında, zaman değişimi daima pozitif ve sonsuza kadardır. ($0 < t < \infty$)

2. Laplace dönüşümleri daima doğrusal diferansiyel denklemlere uygulanır.

$$L\{a\, f_1(t) + b\, f_2(t)\} = aL\{f_1(t)\} + bL\{f_2(t)\} \quad (2.5)$$

İki fonksiyonun toplamlarının Laplace dönüşümü her iki fonksiyonun ayrı ayrı Laplace dönüşümlerinin toplamına eşittir. a ve b sabit katsayıları f_1 ve f_2 de fonksiyonları göstermektedir.

3. Laplace dönüşümü sonunda t değişkeni s değişkeni yolu ile elimine edilir.

Türevin Laplace Dönüşümleri

$$£\{f'(t)\} = sf(s) - f(0)$$

$$£\{f''(t)\} = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$£\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n f(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots . - f^{n-1}(0)$$

İntegralin Laplace Dönüşümleri

$$£\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

$$y = f(t) \quad y(0) = 1 \quad L(y) = Y(s)$$

$$\boxed{5\frac{dy}{dt} + 4y = 2}$$

- Yukarıdaki diferansiyel denklemi Laplace dönüşümlerini kullanarak çözünüz

- y → t'ye bağlı bir fonksiyon
- t= 0 anındaki fonksiyonun değeri **1**
- y fonsiyonunun laplace dönüşümü = **Y(s)**

Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

$$y = f(t) \quad y(0) = 1 \quad L(y) = Y(s)$$

$$5\frac{dy}{dt} + 4y = 2$$

- Her bir terime laplace dönüşümü uygulanır
- Y(s) bulmak için cebirsel çözüm yapılır.
- Her bir terim için “ters laplace” uygulanır.
- Tablolardan yararlanabilirsiniz.

ÖRNEK

Aşağıdaki diferansiyel denklemi Laplace dönüşümü yöntemi ile çözünüz.

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

Son Değer ve İlk Değer Teoremi

Proses dinamiğinde ve proses kontrolde ilk ve son değer teoremi proses hakkında bilgi verir.

$$\lim_{t\to\infty}[f(t)] = \lim_{s\to 0}[s\,F(s)]$$

SON DEĞER TEOREMİ

- Fonksiyonun t=∞ yatışkın koşul değerinin bulunması için kullanılır.

$$\lim_{t\to 0}[f(t)] = \lim_{s\to\infty}[s\,F(s)]$$

İLK DEĞER TEOREMİ

- Fonksiyonun başlangıç koşullarının (t=o) bulunması için kullanılır.

Son Değer ve İlk Değer Teoreminin uygulanmasına bir örnek

$$Y(s) = \frac{5s+2}{s(5s+4)}$$

- Fonksiyonun laplace dönüşümü

$$sY(s) = \frac{5s+2}{(5s+4)}$$

- İlk değer teoreminin uygulanması

$$\lim_{s\to\infty} sY(s) = \frac{5s+2}{5s+4} = 1$$

- Son değer teoreminin uygulanması

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{5s+2}{5s+4} = 0.5$$

ÖRNEK

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 2 \quad y(0) = y'(0) = 0$$

- ODE / Başlangıç Koşulları
- Her bir terime laplace dönüşümünü uygula
- Y(s) bulmak için çözüm yap.
- Kısmi kesirlerine ayır.

- Her bir terim için “ters laplace” uygula.

ÇÖZÜM

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 8y = 2 \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = 2/s$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{4s} + \frac{-1}{2(s+2)} + \frac{1}{4(s+4)}$$

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-4t}}{4}$$

- ODE / Başlangıç Koşulları
- Her bir terime laplace dönüşümünü uygula
- Y(s) bulmak için çözüm yap.
- Kısmi kesirlerine ayır.

- Her bir terim için “ters laplace” uygula.