ÖRNEK 3: İzotermal CSTR'da 1. Mertebe Tepkime

Problem: **Proses modelini bulmak**

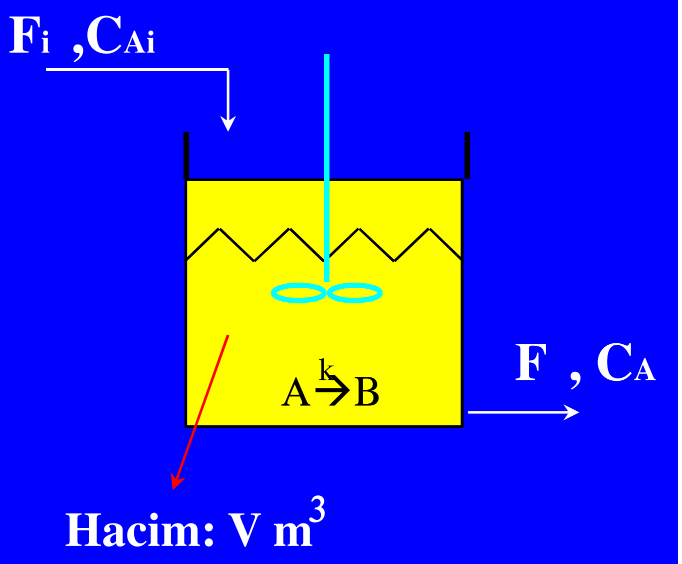
A bileşeni için kütle denkliği:

Biriken= Giren - Çıkan - Tüketilen

$$\frac{d(M_A\, V\, C_A)}{dt} = M_A\, F\, C_{Ai} - M_A\, F\, C_A - M_A\, V\, k\, C_A$$

M_A: A'nın molekül ağırlığı, V= sabit

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F}{V} C_{Ai} - \frac{F}{V} C_A - kC_A$$



Çıkış değişkeni: C_A (mol/m^3)

Giriş değişkeni: C_{Ai} (mol/m^3)

$$\frac{dC_A}{dt} + \left(\frac{F + kV}{V}\right) C_A = \frac{F}{V} C_{Ai}$$

Model:

$$\boxed{\tau \frac{dC_A}{dt} + C_A = \frac{F}{F + kV} C_{Ai}}$$

$$\frac{V}{F + kV}$$

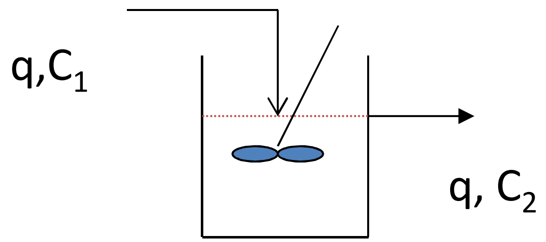
Her iki tarafın L dönüşümü alınırsa, [C_A (t=0) = 0 başlangıç koşuluyla]

$$\tau s\, C_A(s) + C_A(s) = \underbrace{\frac{F}{F + kV}}_{K} C_{Ai}(s)$$

Tranfer Fonksiyonu:

$$G(s) = \frac{C_A(s)}{C_{Ai}(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Örnek 4: Karıştırma prosesi



V: tankın hacmi (m^3)
q: hacimsel sıvı akış hızı (m^3/s)
C_1 : giriş şeker konsantrasyonu(kg/m^3)
C_2 : çıkış şeker konsantrasyonu(kg/m^3)

Bu sistemin transfer fonksiyonunu bulunuz.

C_1 : giriş değişkeni (sapma değişkeni halinde)
C_2 : çıkış değişkeni (sapma değişkeni halinde)

Bu sistemin transfer fonksiyonunu: $$\frac{C_2(s)}{C_1(s)} = ?$$

Kütlenin korunumu :

Giren kütle akış hızı –Çıkan kütle akış hızı = Kütle birikim hızı

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{d(m)}{dt}$$

$$qC_1 - qC_2 = \frac{d(VC_2)}{dt}$$

$$q(C_1 - C_2) = V\frac{d(C_2)}{dt}$$

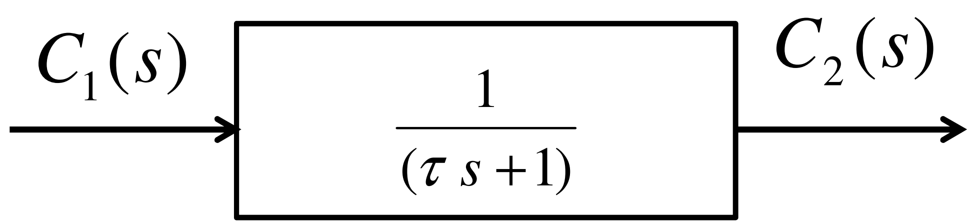
$$(C_1 - C_2) = \underbrace{\left(\frac{V}{q}\right)}_{\tau}\frac{d(C_2)}{dt}$$

$$C_1 = \tau\frac{d(C_2)}{dt} + C_2$$

$$C_1(s) = \tau s C_2(s) + C_2(s)$$

$$C_1(s) = C_2(s)\left[\tau s + 1\right]$$

$$\frac{C_2(s)}{C_1(s)} = \frac{1}{\left[\tau s + 1\right]}$$



Blok Diagram

Örnek 5: İki giriş değişkeni olursa

Bazı durumlarda iki adet giriş değişkeni olabilir. (Örneğin karıştırma tankına iki adet akım giriyor olabilir.)

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = x$$

I. Mertebeden diferansiyel denklemle ifade edilen bir sistemin matematiksel modeli <u>(tek giriş değişkeni)</u>

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K_1 x_1 + K_2 x_2$$

I. Mertebeden diferansiyel denklemle ifade edilen bir sistemin matematiksel modeli <u>(iki giriş değişkeni)</u>

y: çıkış değişkeni
x: giriş değişkenleri
τ : (tau) zaman sabiti
K: Kazanç (gain) → sabit

Örnek: İki giriş değişkeni olursa

Böyle bir modelin transfer fonksiyonunu bulabilmek için her iki tarafın laplace alınır.

$$\tau \frac{dy}{dt} + y = K_1 x_1 + K_2 x_2$$

$$\tau sY(s) - y(0) + Y(s) = K_1 X_1(s) + K_2 X_2(s)$$

$$Y(s)\left[\tau s + 1\right] = K_1 X_1(s) + K_2 X_2(s)$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{\left[\tau s + 1\right]} X_1(s) + \frac{K_2}{\left[\tau s + 1\right]} X_2(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{K_1}{\left[\tau s + 1\right]}$$

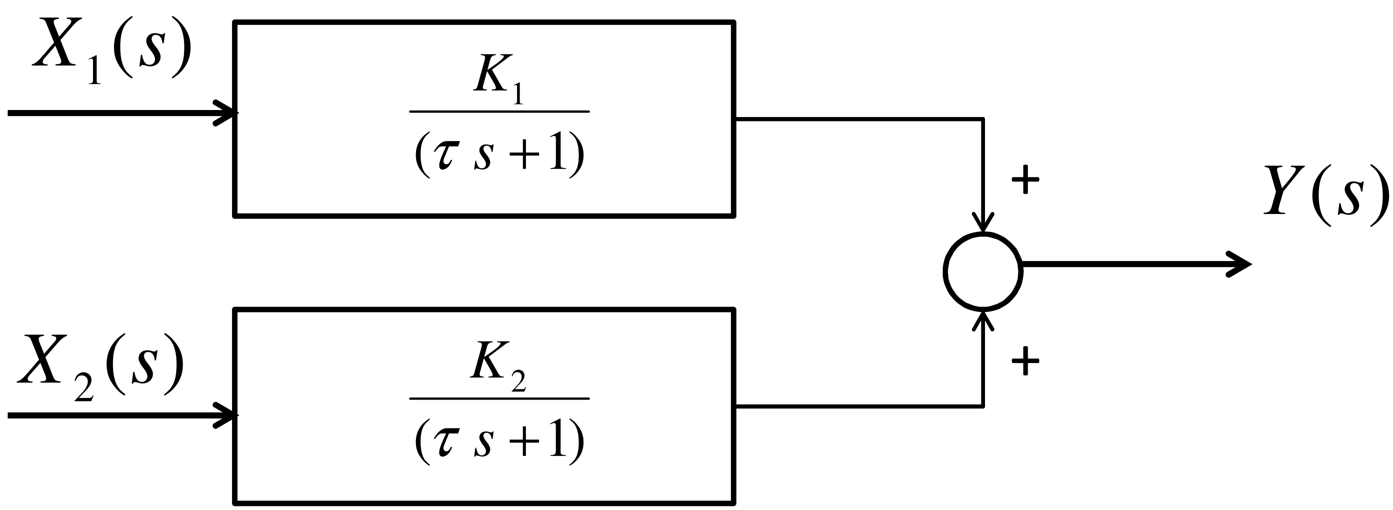
$$\frac{Y(s)}{X_2(s)} = \frac{K_2}{\left[\tau s + 1\right]}$$

Örnek: İki giriş değişkeni olursa

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{K_1}{[\tau s + 1]}$$ **İletim Fonksiyonu I**

$$\frac{Y(s)}{X_2(s)} = \frac{K_2}{[\tau s + 1]}$$ **İletim Fonksiyonu II**

Y(s) iki iletim fonksiyonunun toplamına eşittir.



BAZI TANIMLAR

Sistemin Mertebesi *(order)*:

G(s) genellikle s'e göre iki polinomun oranı olarak gösterilebilir.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots\ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots\ldots + b_1 s + b_0}$$

$$= \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots\ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots\ldots (s - p_n)}$$

Gerçekleştirilebilir olması için : $n \geq m$ gerekir

- t alanında: Modelde çıktının en yüksek türevinin mertebesi
- s alanında: Transfer fonksiyonun paydasındaki polinomda s'in en yüksek derecesi (yukarıdaki yazıma göre: n)

Sistemin sıfırları (*zero*): **Transfer fonksiyonun payındaki polinomun s'e göre kökleri (z_1, z_2,..., z_m).**

Sistemin kutupları (*pole*): **Transfer fonksiyonun paydasındaki polinomun s'e göre kökleri (p_1, p_2,....,p_m).**
(Karakteristik polinomun kökleri)

1. mertebe bir sistem: $G(s) = \dfrac{K}{\tau s + 1}$

Zaman sabiti (*Time constant*, τ): Sistemin yanıtımının ne kadar hızlı olduğunun bir ölçüsü ***(birimi : zaman)***

Yatışkın hal kazancı (Steady State Gain, K): Çıkış değişkeninin prosesteki değişikliğe karşı yanıtı hakkında bilgi verir.