

FİZ304 İSTATİSTİK FİZİK VE TERMODİNAMİK

“Temel Olasılık Kavramları I”

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR

Ankara Üniversitesi, Fizik Bölümü

2017

İstatistik Topluluk

- Üzerinde deneyler ve gözlemler yapabileceğimiz sistem A olsun, tek bir deneyle elde edilen bir sonuç birçok durumda yetersiz kalır, sistem hakkında tam bir öngörude bulunmaz. Bir tek sistemi incelemek yerine çok sayıda N özdeş sistemlerden oluşan topluluk incelenir.
- İncelediğimiz A sistemi A_1 ve A_2 zarlarından oluşsun, r olayı A_1 zarının 6 yüzünden birinin üste gelmesi olsun. Örneğin A_1 'in 2 yüzü yukarı geldi ve A_2 'nin de 2 yüzü yukarı geldi, bu durumun oluşma olasılığı $P_{22} = 1/6 * 1/6 = 1/36$ elde edilir.



Simetri özelliğinden dolayı zarın herhangi bir yüzünün gelme olasılığı $1/6$ olur. Zarın 1 veya 2 sayısını göstermesi olasılığı $1/6 + 1/6 = 1/3$.

Binom Dağılımı

- N tane spin-1/2 ve μ_0 magnetik momente sahip ideal bir spin sisteminde, spinin magnetik alan ile aynı yönde olması olasılığı p ve zıt yönde olması olasılığı q olsun.
- Normalizasyon koşulu $p + q = 1$ dir.
- Magnetik alan uygulanmadığında magnetik momentler için bir seçilmiş yol olmadığından $p = q = 1/2$ dir. Magnetik alan uygulandığında momentler alan ile aynı yönlü olma eğilimindedir ($p > q$ olması beklenir).
- Burada n momentin alan ile aynı yönlü, geri kalan n' momentin zıt yönde olduğu özel şekillenimin olması olasılığı $P_{nn'} = [p.p.p\dots p][q.q.q\dots q] = p^n q^{n'}$ yazılır. Böylece $P(n)$ olasılığı $P(n) = C(n)p^n q^{n'}$ ve $C(n) = N!/n!(N-n)!$.

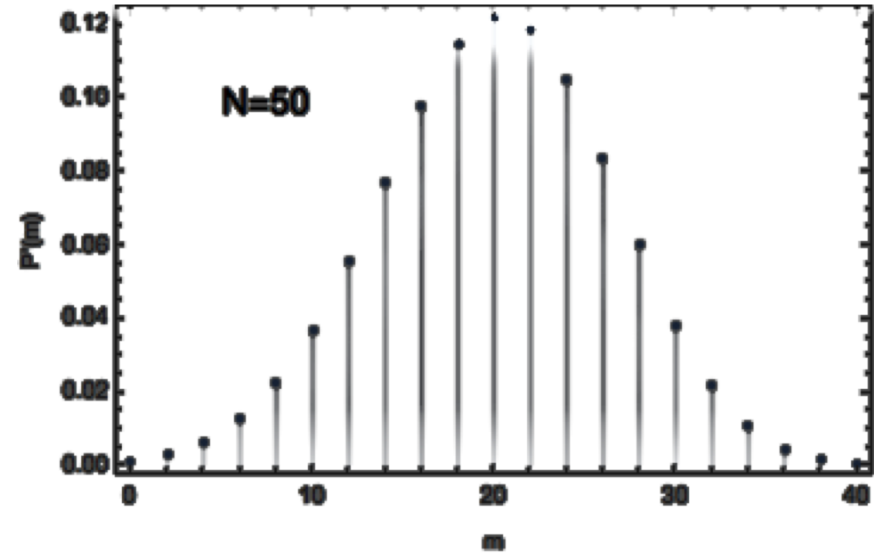
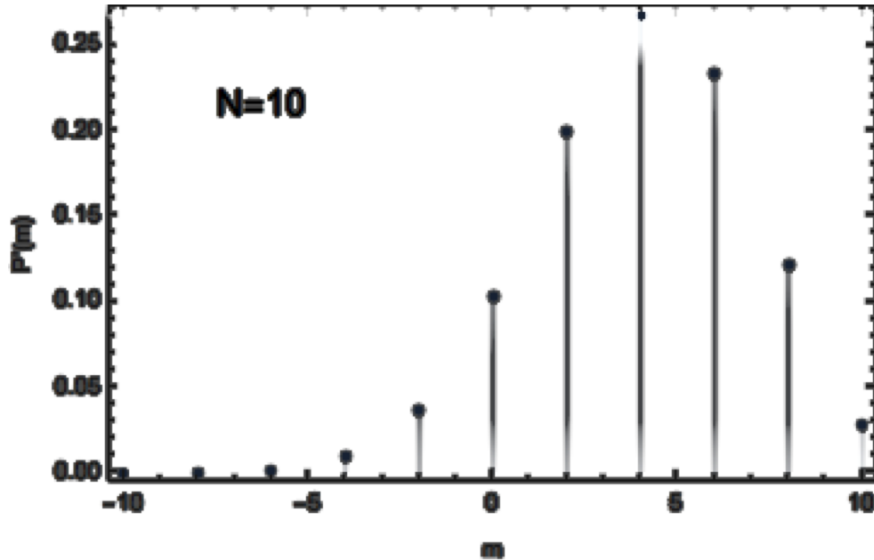
Spin Sistemine Uygulama

Spin sistemi magnetik alan uygulanmadığında uzayda seçilmiş bir yönelim göstermez, bu nedenle $p = q = 1/2$ alınır. Magnetik alan uygulandığında $p > q$ olunca $C_N(n)$ katsayısı $P(n)$ nin maksimumunu oluşturur, ancak bu maksimum $n > N/2$ olan bir değere kaymış olur.

- Örnek: $1/2$ spinli N sistemin toplam momenti $M = m\mu_0$ cinsinden $m = n - n'$ değerlerini olması olasılığı $P'(m) = N! p^{(N+m)/2} q^{(N-m)/2} / [((N+m)/2)! ((N-m)/2)!]$ ile verilir. Uygulanan bir magnetik alan nedeni ile $p = 0.7$ ve $q = 0.3$ olmuştur. $P'(m)$ olasılık dağılımını $N = 10$ alarak ve $N = 50$ alarak çizelim.

Olasılık Dağılımı

$P'(m)$ olasılık dağılımı $p = q = 0.5$ için $m=0$ etrafında bir dağılım gösterirken, buradaki örnekte $p = 0.7$ ve $q = 0.3$ alındığında $m \sim$ etrafında bir dağılım gösterir, $N=50$ alındığı durumda standart sapma, $N=10$ alındığı durumdakinden daha büyüktür.



Binom Dağılımı

Binom dağılımı ile yapılabilen bazı örnekler:

- N moleküllü ideal gaz, V_0 hacimli bir kutu içine kapatılmış olsun. Kutu V ve V' olmak üzere iki bölmeye ayrılıyor. Bir molekülün V hacminde bulunma olasılığı p ve V' hacminde bulunma olasılığı q ile gösteriliyor. $p = V/V_0$ ve $q = V'/V_0$ tanımlanırsa

$$P(n) = N!/n!(N-n)! (V/V_0)^n (V'/V_0)^{n'}$$

elde edilir.

- Para veya zar atışı, N tane paradan oluşan bir kümede paranın yazı gelme olasılığı p ve tura gelme olasılığı q olsun. Simetri nedeniyle $p = q = 1/2$ dir. N paradan n tanesinin yazı gelmesi $P(n)$ olasılığı Binom dağılımı ile verilir:

$$P(n) = N!/n!(N-n)! * (1/2)^N.$$

Ortalama Değerler

- Bir sistemin u değişkeni u_1, u_2, \dots, u_n olası değerleri almaktadır. Bu değerleri alma olasılıkları da sırasıyla p_1, p_2, \dots, p_n ile verilir. Burada u_r değişken değeri için p_r olasılığının tanımlanması sistemin en iyi istatistik anlatımını verir. İstatistik kümede

$$\bar{u} = \sum_r P_r u_r$$

tanımlanır. Ayrıca u' ya bağlı bir fonksiyonun ortalama değeri de hesaplanabilir.

$$f(u) = \sum_r P_r f(u_r)$$

- İki terimin toplamının ortalama değeri terimlerin ortalama değerlerinin toplamına eşittir.
- C bir sabit olmak üzere $Cf(u)$ ortalama değeri C kez $f(u)$ ortalama değerine eşittir.

Spin Sisteminde Ortalama Değer

- Spin sistemi 4 adet spin-1/2 parçacıktan oluşmaktadır. Alan ile aynı yönlü olan momentlerin sayısı $n = 0, 1, 2, 3, 4$ değerlerini alabiliyor. Bu sayıların meydana gelme olasılıkları:

$$P(0) = P(4) = 1/16, \quad P(1) = P(3) = 1/4, \quad P(2) = 6/16.$$

- Böylece alan ile aynı yönlü momentlerin ortalama sayısı $n \sim = \sum_n P(n)n = 2$, Binom dağılımından $n \sim = Np = 4 \cdot (1/2) = 2$ bulunur.
- Magnetik momentleri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ olan sistemin toplam magnetik momenti

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N = \sum_i \mu_i$$

KAYNAKLAR

(0) İstatistik Fizik ve Termodinamik Ders Notları (FİZ304), Hazırlayan: Orhan Çakır, Ankara Üniversitesi Kütüphanesi Açık Ders Malzemeleri, <https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=634> (son erişim tarihi: 11 Mart 2017). Bu ders notları aşağıda verilen kaynaklardan derlenmiştir. Ayrıntılı bilgi için bu kaynaklara başvurulabilir.

(1) İstatistik Fizik (F. Reif), Berkeley Fizik Dersleri Serisi - Cilt 5, Tercüme: T. N. Durlu, Y. Elerman, Bilim Yayınevi, Bilim Yayınları-43, ISBN: 975-556-054-8.



(2) Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, F. Reif, Waveland Press, Inc., Reissued (2009).

