FİZ304 İSTATİSTİK FİZİK VE TERMODİNAMİK

“Temel Olasılık Kavramları II”

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR
Ankara Üniversitesi, Fizik Bölümü
2017

Sürekli Olasılık Dağılımları

- Çok sayıda parçacık sistemlerinde N çok büyük olduğundan toplam magnetik momentin $\pm N\mu_0$ değerleri dışında P’’(M) olasılığı M ‘nin bir değerinden diğerine önemli değişklik göstermez.

  $|P''(M+2\mu_0)-P''(M)| << P''(M)$

  olur. Bağıntılar

  $M = m\mu_0 = (2n-N)\,\mu_0$, $m = (M/\mu_0)$, $n = (N+m)/2$

  elde edilir.
- Sürekli durum ve kesikli durum bağlantısı

  $P(M)dM = P''(M)\,\Delta M/2\mu_0$

  ile verilir.

Normal Dağılım

- N büyük olduğunda Binom dağılımındaki faktöryellerin hesaplanması zorlaşır, bazı yaklaşımlarla yeni özellikler belirlenebilir. Bunlar
  - P(n) olasılığı n=n~ özel değerin dışında oldukça küçük olur.
  - P(n) olasılığı n=n~ civarında (çok fazla değişmediğinden) yaklaşık bir büyüklükle kullanılabilir.
  - P(n) nin maksimum olduğu yerde n konumu yakınında davranışı incelemek yeterli olur.
  - n çok büyükse n nin bir birim değişiminde P(n) çok az değişir, lnP(n) daha da az değişir. |P(n+1)-P(n)| << P(n) olur.

Normal Dağılım

- $P(n)$ yi maksimum yapan $n=\tilde{n}$ özel değeri $dP/dn = 0$ koşuluyla veya eşdeğer olan $\ln P$ nin maksimum olma koşulu ile belirlenir. Burada

  $$d\ln P/dn = 1/P \; dP/dn = 0$$

  olacaktır. Stirling formulunu kullanarak $\ln P = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n\ln p + (N-n)\ln q$ ifadesindeki $< \ln m! >$ terimlerini hesaplayalım.

  $$d\ln m!/dm = (\ln(m+dm)! - \ln m!)/dm$$

  $$(m+dm)! = (m+dm)(m+dm-1)(m+dm-2)\ldots(m+1)m(m-1)\ldots1$$

  $$d\ln m!/dm = \ln m$$

Buradan maksimum olma koşulu $d\ln P/dn = -\ln n + \ln(N-n) + \ln p - \ln q$ elde edilir.

Normal Dağılım

- $\ln P(n)$ ifadesini Taylor serisine açarız

  $\ln P(n) = \ln P(n) + (d\ln P/dn)y + 1/2\ d^2\ln P/dn^2\ y^2 + \ldots$

  Burada $y = n-n\sim$ alınır,

  $d^2\ln P/dn^2 = -1/n - 1/N-n = -(N/n(N-n)) = -1/Npq$

  Böylece

  $\ln P(n) = \ln P(n\sim) - y^2/2Npq + \ldots.$

  Normal dağılım

  $P(n) = P(n\sim)\ e^{-y2/2Npq}$

  elde edilir. Normalizasyon ile $P(n\sim) = 1/(2piNpq)^{1/2}$ yerine yazıldığında Gauss dağılımı aşağıdaki gibi yazılır

  $P(n) = 1/(2pi\sigma)^{1/2} \exp(-(n-n\sim)^2/2\sigma^2)$

Poisson Dağılımı

- $N \gg n$ ve $p \ll 1$ olduğunda

  $N!/(N-n)! = N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)$

  ifadesinde eşitliğin ikinci tarafında $N \gg 1$, $N \gg 2$, vb. olduğundan N sayısı n kez görünmektedir.
- Böylece

  $N!/(N-n)! = N^n$

olur. Yeni bir değişken tanımlarsak $y=(1-p)^{(N-n)}$ aynı zamanda $\ln y = (N-n)\ln(1-p)$, burada $n \ll N$ ise $N-n \sim N$ olur. Ayrıca $p \ll 1$ koşulu $\ln(1-p) \sim -p$ alınabilir. Böylece Poisson dağılımı aşağıdaki gibi yazılır:

$$P(n) = \lambda^n/n!\, e^{-\lambda}$$

Örnek Problem

- Kenar uzunluğu 2a olan küpün içine a yarıçaplı küre yerleştiriliyor. Küre içinde bulunan gaz moleküllerinin sayısı

$p = (4/3)\pi a^3/(8a^3) = \pi/6$; $q = 1-p = 1- \pi/6$

$\tilde{n} = Np$; $\sqrt{(\Delta n)^2} = Npq$

sapmaların değeri ise

$\Delta n / \tilde{n} = (1/\sqrt{N})(q/p)^{1/2} = (1/\sqrt{N})[(6- \pi)/\pi]^{1/2}$

eşitliğiyle belirlenir.

Örnek Problem

- Spini 1 ve açısal momentumu $\hbar$ olan bir çekirdeği ele alalım. Magnetik momentin bir yöndeki bileşeninin üç olası değeri $+\mu_0$, μ_0, $-\mu_0$ ile verilir. Bunların olasılıkları ise (p, 1-2p, p) alalım. Ortalama değer μ~ ve sapmaların ölçüsünü bulalım.

Magnetik moment	Olasılık
$-\mu_0$	p
0	1-2p
$+\mu_0$	p

$$\langle\mu\rangle = \sum P_r\, \mu_r = p\, \mu_0 + (1-2p).0 + p(-\mu_0) = 0$$

$$\langle\mu^2\rangle = \sum P_r\, \mu_r^2 = p\, \mu_0^2 + p(-\mu_0)^2 = 2p\, \mu_0^2$$

$$\langle(\Delta\mu)^2\rangle = \langle\mu^2\rangle - \langle\mu\rangle^2 = 2p\, \mu_0^2$$

KAYNAKLAR

(0) İstatistik Fizik ve Termodinamik Ders Notları (FİZ304), Hazırlayan: Orhan Çakır, Ankara Üniversitesi Kütüphanesi Açık Ders Malzemeleri,

https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=634 (son erişim tarihi: 11 Mart 2017). Bu ders notları aşağıda verilen kaynaklardan derlenmiştir. Ayrıntılı bilgi için bu kaynaklara başvurulabilir.

(1) İstatistik Fizik (F. Reif), Berkeley Fizik Dersleri Serisi - Cilt 5, Tercüme: T. N. Durlu, Y. Elerman, Bilim Yayınevi, Bilim Yayınları-43, ISBN: 975-556-054-8.

(2) Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, F. Reif, Waveland Press, Inc., Reissued (2009).