FİZ304 İSTATİSTİK FİZİK VE TERMODİNAMİK

"Klasik Yaklaşımda Kanonik Dağılım I"

Prof.Dr. Orhan ÇAKIR
Ankara Üniversitesi, Fizik Bölümü
2017

Klasik Yaklaşımın Geçerliliği

- Klasik kavramlarla yapılan bir istatistik teorinin hangi koşullar altında geçerli bir yaklaşım olduğunu, geçerli bir yaklaşımda istatistik teorinin klasik kavramlarla nasıl tanımlanacağını inceleyelim.
- Mutlak sıcaklık yeterince küçük ise klasik yaklaşım geçerli olmaz
    - $kT \leq \Delta\bar{E}$ (sistemin olası enerjilerinin kuantumlu olması anlamlıdır)
    - $kT \gg \Delta\bar{E}$ (olasılıklar bir durumdan diğerine çok az değişir)
- Kuantum mekaniksel özelliklerin önemsiz olduğu yerde klasik yaklaşım geçerli olacaktır.
- Klasik kavramların anlamlı kullanımı üzerine kuantum mekaniğinin getirdiği sınırlama “Heisenberg belirsizlik ilkesi” dir, $\Delta q \cdot \Delta p > \hbar$.

Klasik Yaklaşımın Geçerliliği

- Belli bir sıcaklıkta bir sistemin anlatımı için anlamlı ifade, sistemin s_0 ile tanımlanan bir uzaklıkta konumlanan parçacık ve bunun momentumu p_0 arasındaki bağıntı

  $s_0 \,.\, p_0 >> \hbar$

  burada s_0 ve p_0 yeterince büyük ise Heisenberg belirsizlik ilkesi önemini kaybeder ve **klasik yaklaşım** geçerli olur.
- Parçacığın boyutu s_0 , de Broglie dalgaboyu λ_0 'ın 2π ye bölümünden çok büyük olduğunda kuantum etkiler önemsenmeyecektir.

  $s_0 >> \lambda\!\!\!^{-}_0$

Parçacığın olası durumlarını saymak için faz uzayı (q,p) bölgesini $\delta q.\delta p = h_0$ yüzeyli küçük kesikli aralıklara bölünür.

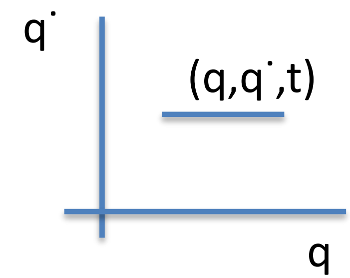
Koordinat Uzayı ve Faz Uzayı

Koordinat uzayında klasik bir sistem için Lagrangian $L(q,\dot{q},t)$ şeklinde yazılır. Faz uzayında Hamiltonian $H(q,p,t)$ şeklinde yazılır.

Örnek: Parçacık hareketi (serbest parçacık)

$L(q,\dot{q},t) = (1/2)m\dot{q}^2$

$H(q,p,t) = p^2/2m$

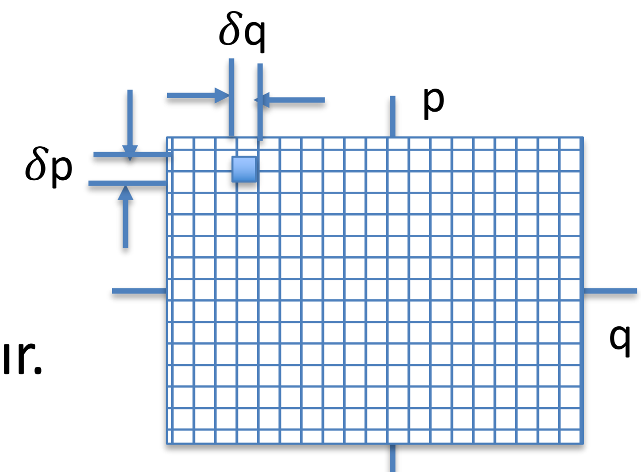


Örnek: Harmonik salınıcı (bağlı durum)

$L(q,\dot{q},t) = (1/2)m\dot{q}^2 – (1/2)kq^2$

$H(q,p,t) = p^2/2m + kq^2/2$

Burada $L = T – V$ ve $H = T + V$ alınmaktadır.



Faz uzayı $(\delta q,\delta p)$ eşit hücrelere ayrılmıştır

Maxwell Hız Dağılımı

- Tek atomlu molekülün kinetik enerjisi

  $\varepsilon = (1/2)mv^2 = p^2/2m$

ve molekülün durumu ise x, y, z konum koordinatları ve bunlara karşı gelen p_x, p_y, p_z momentum bileşenleri cinsinden tanımlanır. Bu konum ve momentum değişkenleri, büyüklüğü $d^3r.d^3p$ olan **faz uzayını** tanımlar.

- Molekülün konumu r ile r+dr aralığında ve momentumu da p ile p+dp aralığında olma olasılığını bulabiliriz:

  $P(r,v)\, d^3r\, d^3p \sim \exp(-\beta(p^2/2m))\, d^3r\, d^3p$

Bu ifadeyi momentum yerine hız cinsinden yazabiliriz. Burada tanımlanan $f(v)d^3v \cong$ v ile v+dv aralığında bir hıza sahip olan belirli cinsten ve birim hacim başına ortalama molekül sayısı

Maxwell Hız Dağılımı

- Gaz içindeki bir molekülün konumu ve hızı üzerinde ayrıntılı bilgi veren ifadeyi yazmak istiyoruz. Bu ideal gazın N molekülü birbiriyle etkileşmeden, bağımsız olarak hareket ettiklerinden, bir istatistik moleküller topluluğu oluşturur. Böylece hızları v ile v+dv aralığında olan moleküllerin ortalama sayısı

  $f(v)\, d^3v = C \exp(-\beta(mv^2/2))\, d^3v$

  Maxwell hız dağılımı

  ile verilir.
- Bu ifade çıkarılırken P'(r,v) olasılığı ve f(v) ortalama sayısı molekülün r konumundan bağımsız alınmıştır, nedeni ise dış kuvvetlerin yokluğunda molekül, uzayda tercihli bir konuma sahip değildir.
- Hız dağılımındaki C sabiti, olası tüm hızlar üzerinden integral alıp birim hacim başına moleküllerin toplam sayısına eşitleyerek bulunur, böylece $C = n(\beta m/2\pi)^{3/2}$ dir.

Molekül Demetleri

- Bir kap içinde dengede bulunan gazı ele alalım. Kabın yan yüzlerinden biri üzerinde D çapında küçük bir delik açılsın (yeterince küçük olduğunda kap içindeki gazın dengesinin bozulması önemsizdir). Bu durumda delikten kaçan gaz molekülleri kabın içinde dengede bulunan gaz moleküllerini temsil edecektir. Burada kaçan gaz moleküllerinden toplayıcı yarıklar yardımıyla bir demet oluşturulursa bunlar iki amaç için incelenebilir: (i) kabın içinde dengedeki moleküllerin hız dağılımlarını belirlemek, (ii) temel atomik ve nükleer özellikleri araştırmak için yalıtılmış atom veya molekülleri incelemek
  - Örnek demet deneyleri: elektron spini ve magnetik momenti ölçümü (Stern ve Gerlach), nükleer magnetik momentlerin ölçümü (Rabi vd.), elektromagnetik etkileşmelerin kuantum teorisinin anlaşılmasına yardımcı olan deneyler (Kusch ve Lamb).
- D boyutu ile ilgili açıklama: $D/v^{-} \ll l/v^{-}$ veya $D \ll l$ olmalıdır.

Eşbölüşüm

- Kanonik dağılım, koordinat ve momentum sürekli değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak alınır. Bir ortalama değeri integraller yardımıyla hesaplayabiliriz. Sistemin enerjisi genel olarak $E = E(q_1,q_2,\ldots,q_f,\ p_1,p_2,\ldots,p_f)$ şeklinde bir fonksiyondur. Burada $E = \varepsilon_i(p_i) + E'(q_1,q_2,\ldots,q_f,\ p_1,p_2,\ldots,p_f)$ tanımlanabilir. İncelenen sistem T sıcaklığında bir ısı deposu ile dengede olsun, bu durumda ε_i ortalama değeri ne olacaktır?

$$\overline{\varepsilon_i} = \frac{\int e^{-\beta E(q_1,\ldots,p_f)}\varepsilon_i\, dq_1,\ldots,dp_f}{\int e^{-\beta E(q_1,\ldots,p_f)}\, dq_1,\ldots,dp_f} = \frac{\int e^{-\beta(\varepsilon_i + E')}\varepsilon_i\, dq_1,\ldots,dp_f}{\int e^{-\beta(\varepsilon_i + E')}\, dq_1,\ldots,dp_f}$$

Burada $\varepsilon_i = b\, p_i^2$ aldığımızda, integraller hesaplandıktan sonra $\varepsilon_i^- = (1/2)kT$ elde edilir, kuadratik terimin ortalaması kT/2 dir.

KAYNAKLAR

(0) İstatistik Fizik ve Termodinamik Ders Notları (FİZ304), Hazırlayan: Orhan Çakır, Ankara Üniversitesi Kütüphanesi Açık Ders Malzemeleri,

https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=634 (son erişim tarihi: 11 Mart 2017). Bu ders notları aşağıda verilen kaynaklardan derlenmiştir. Ayrıntılı bilgi için bu kaynaklara başvurulabilir.

(1) İstatistik Fizik (F. Reif), Berkeley Fizik Dersleri Serisi - Cilt 5, Tercüme: T. N. Durlu, Y. Elerman, Bilim Yayınevi, Bilim Yayınları-43, ISBN: 975-556-054-8.

(2) Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, F. Reif, Waveland Press, Inc., Reissued (2009).