

**Ankara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi  
Jeofizik Mühendisliği Bölümü**

**JFM316 ELEKTRİK YÖNTEMLER  
LİSANS DERS NOTU**

## **II- DOĞRU AKIM ÖZDİRENÇ YÖNTEMİNDE İKİ-BOYUTLU MODELLEME VE TERS ÇÖZÜM**

**Dr. M. Emin CANDANSAYAR**

Ankara Üniv., Müh. Fak., Jeofizik Müh. Böl., 06100, Beşevler-Ankara.

E-posta: candansa@eng.ankara.edu.tr

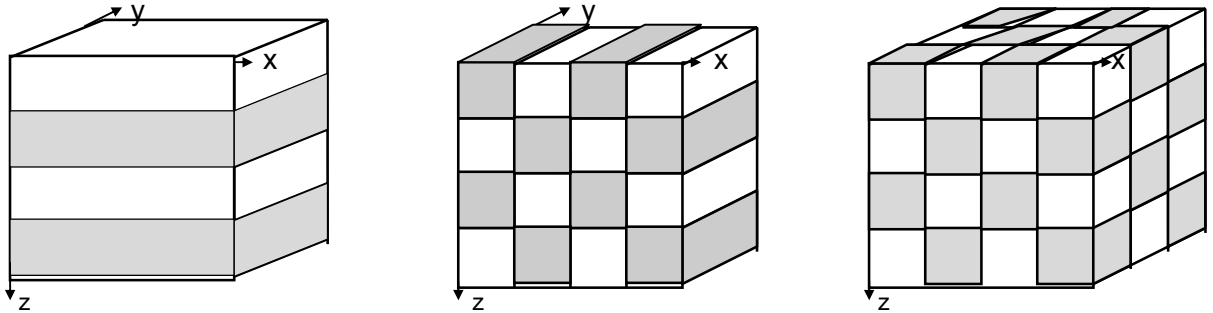
**Mart 2007  
ANKARA**

## DOĞRU AKIM ÖZDİRENÇ YÖNTEMİNDE İKİ-BOYUTLU MODELLEME VE TERS ÇÖZÜM

### 1. MODELLEME

Modelleme, varsayılan bu modelin jeofizik tepkisinin matematiksel bir bağıntı ile tanımlanması ve bu bağıntı yardımıyla ölçülmesi beklenen değerleri sayısal olarak hesaplamak şeklinde tanımlanabilir.

Ölçülen jeofizik verilerin yeterliliğine göre nitel yorum yapılırken yerçi 1-B, 2-B veya 3-B bir model ile ifade edilir. Bu modelin jeofizik tepkisi ise ters çözümde kuramsal veri olarak kullanılır. DAÖ verilerinin 1-B modellemesinde, iletkenlik dağılımına göre yerçinin homojen ve izotrop katmanlardan oluştuğu varsayılır (Şekil 2.1.a) ve sonuçta istenilen elektrod dizilimi için GÖ düşey elektrik sondajı verileri hesaplanır. 2-B modellemede ise yerçinin iletkenliğinin x ve z yönünde değişen y yönünde sabit kalan bloklardan oluştuğu varsayılır (Şekil 2.1.b) ve sonuçta GÖ yapma-kesit verileri hesaplanır. 3-B modellemede ise yerçi, iletkenliğe göre kendi içinde homojen ve izotrop küpler' den oluştuğu varsayılır (Şekil 2.1.c) ve sonuçta x-y düzleminde istenene elektrod dizilimi için GÖ' ler hesaplanır.



Şekil 1.1-B iletkenlik modeli (a),2-B iletkenlik modeli (b), 3-B iletkenlik modeli (c).

Modelleme yapabilmek için modeli tanımlayan bir matematiksel bağıntı gereklidir. 1-B modellemede bu bağıntı

$$\phi = \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} T(\lambda) J_0(\lambda a) d\lambda \quad (1.1)$$

şeklinde (Koefod, 1970). Burada  $I$  yere uygulanan akım,  $T(\lambda)$  dönüşük öz direnç fonksiyonu,  $J_0(\lambda a)$  sıfırıncı dereceden birinci cins Bessel fonksiyonu ve  $\phi$  ise gerilimdir. Denklem (1.1) ile ilgili ayrıntılı olarak Başokur' a (1984) bakılabilir. 2-B modellemede ise kullanılan bağıntı,

**Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.**

$$-\nabla(\sigma(x,z).\nabla\phi(x,z))=I(x,z) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan Poisson denklemdir. 3-B modellemede ise (1.2) denklemi

$$-\nabla(\sigma(x,y,z).\nabla\phi(x,y,z))=I(x,y,z) \quad (1.3)$$

şeklinde yazılır. Denklem (1.2) ve (1.3)' de kullanılan değişkenler Bölüm 2.2 de verilmiştir. Yukarıda yazılan model bağıntılar sınır koşulları kullanılarak çözülür.

## 1.2. Model Bağıntısı

Elektrik prospeksiyon teorisi, homojen olmayan bir iletken yer için EM alanın genel kuralları kullanılarak geliştirilmiştir (Zhdanov ve Keller, 1994). Doğru akım öz direnç yönteminde, modellemede kullanılan Poisson Denklemi, EM alanları tanımlayan Maxwell denklemleri kullanılarak çıkarılabilir. Bu bağıntının çıkarılmasında, akımın süreklilik denklemi ve  $\vec{E}$  nin kapalı bir alanda integralinin yoldan bağımsız olması (konservatif) özelliklerinden yararlanılarak

$$-\nabla.[\sigma(x,y,z)\nabla\phi(x,y,z)]=I.\delta(x-x_s).\delta(y-y_s).\delta(z-z_s) \quad (1.4)$$

şeklinde bulunur. Burada  $\sigma(x,y,z)$ , 3-B uzayda iletkenlik,  $\phi(x,y,z)$  3-B gerilim,  $I$ , akım,  $\delta(x-x_s)$ ,  $\delta(y-y_s)$  ve  $\delta(z-z_s)$  kaymış birim impuls fonksiyonları,  $(x_s, y_s, z_s)$  nokta akım kaynağının 3-B uzaydaki koordinatları,  $\nabla$  "gradient" ve " $\nabla$ ." ise "diverjans" operatörüdür. Bu denklem Poisson denklemi olarak bilinir ve sadece kaynak civarında geçerlidir. Denklem (1.4), 3-B uzay için yazılmıştır. 2-B modelleme için iletkenlik dağılımının y-yönünde değişmediği kabul edilirse,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\sigma(x,y,z)]=0$$

yazılabilir. Bu kabul (1.4) denkleminde uygulanırsa,

$$-\nabla.[\sigma(x,z)\nabla\phi(x,y,z)]=I.\delta(x-x_s).\delta(y-y_s).\delta(z-z_s) \quad (1.5)$$

eşitliği elde edilir.

Denklem (1.5) de, nokta akım kaynağı ve gerilim; x, y ve z değişkenlerinin fonksiyonudur. Fakat iletkenlik x ve z değişkenlerinin fonksiyonudur. Hesaplamaların kolay yapılabilmesi için Fourier cosinüs dönüşümü ile  $(x,y,z)$  yerine,  $(x, k_y, z)$  uzayında işlemler yapılır. Bu amaç için,

$$\tilde{f}(x, k_y, z) = \int_0^{\infty} f(x, y, z) \cos(y k_y) dy \quad (1.6)$$

$$f(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(x, k_y, z) \cos(y k_y) dk_y$$

dönüşüm çifti kullanılır. Burada  $f(x, y, z)$  ve  $\tilde{f}(x, k_y, z)$  çift fonksiyondurlar. Denklem (1.15),  $(x_s, y_s, z_s)$  noktasındaki nokta kaynak için, iki boyutlu iletkenlik ( $\sigma(x, z)$ ) dağılımından oluştuğu varsayılan, 3-B gerilim ( $\phi(x, y, z)$ ) dağılımını 2-B gerilim dağılımına ( $\phi(x, k_y, z)$ ) çevirir.

Helmholtz denklemi ve Fourier dönüşümünün özelliklerinden yararlanarak (1.5) denklemi cosinüs dönüşümü sonucu  $(x, k_y, z)$  uzayında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\nabla \cdot (\sigma(x, z) \nabla \tilde{\phi}(x, k_y, z)) + k_y^2 \sigma(x, z) \tilde{\phi}(x, k_y, z) = I \delta(x - x_s) \cdot \delta(z - z_s) \quad (1.7)$$

Bu ifade  $k_y$  nin sabit bir değeri için yazılmıştır. 2-B modellemeye 3-B nokta akım kaynağının kullanıldığı problemler 2.5-B (two and a half dimensional) problem olarak isimlendirilebilirler (Petrov, 1995). Çünkü denklem (1.6)' da görüldüğü gibi frekans uzayında,  $k_y$  katsayısına bağlı olarak  $y$ - yönündeki iletkenlik değişimide bir terim ile eklenmiştir. Denklem (1.7) aşağıdaki sınır koşulları ile çözülür.

1.  $\phi(x, y, z)$  gerilimi,  $\sigma(x, z)$  iki boyutlu iletkenlik dağılımının bütün sınırlarında sürekli olmalıdır.
2.  $\vec{J}(\equiv \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \eta})$  akım yoğunluğunun normal bileşeni bütün sınır yüzeylerinde sürekli olmalıdır (Dey ve Morrison 1979).

## 1.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi (SEY); kısmi diferansiyel denklem veya enerji teoremiyle tanımlanan fiziksel bir problemi çözmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir ve ilk olarak Zienkiewicz ve Cheung (1965) tarafından kullanılmıştır.

SEY aşağıda sıralanan altı aşamada uygulanır.

1. Verilen diferansiyel denklem, integral denkleme dönüştürülür. Burada integral denklemi tanımlanan alan için yazılır. İntegral denkleme dönüştürme işlemi, ağırlıklı rezidüel yöntem veya varyasyonel yöntem kullanılarak yapılır.
2. Verilen çözüm bölgesi sonlu sayıda küçük elemana bölünür. Burada alan, doğrusal üçgen elemanlara bölünmüştür. Bu elemanlar birbirlerine düğüm noktalarından (node) bağlıdır. Daha sonra sonlu elemanlar ağındaki elemanlar ve düğüm noktaları ayrı ayrı numaralandırılır.
3. Bilinmeyen  $\phi$  (gerilim) değerleri, her eleman içinde polinom denklemi ile tanımlanır. Burada doğrusal polinom yaklaşımı kullanılmıştır. Tanımlanan polinom denklemi kullanılarak elemanın düğüm noktalarındaki gerilim ( $\phi_i, \phi_j, \phi_k$ ), değerleri tanımlanır. Daha sonra elemanın  $\phi$  değeri düğüm noktalarında tanımlanan  $\phi_i, \phi_j, \phi_k$  değerleri cinsinden yazılır.
4. Üçüncü adımda, düğüm noktalarındaki gerilim değerleri cinsinden yazılan elemanların gerilim değerleri, birinci adımda elde edilen integral denkleme yerleştirilerek her eleman için doğrusal denklem takımları geliştirilir. Geliştirilen bu doğrusal denklem takımları birleştirilerek, her elemana ait dizey denklemleri oluşturulur.
5. Dördüncü adımda oluşturulan eleman dizey denklemleri birleştirilerek sonlu elemanlar ağı için genel dizey denklemi (global matrix equation) elde edilir. Genel dizey denklemini oluştururken Neumann ve Dirichlet sınır koşulları uygulanır.
6. Genel dizey denklemi çözümlenerek düğüm noktalarında tanımlanan gerilimler hesaplanır.

### 1. 1.2.1. İntegral Denkleminin Elde Edilmesi

Denklem (1.7),  $(x_s, 0)$  noktasındaki nokta akım kaynağı için aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \phi(x, y, z)] = -I \delta(x - x_s) \delta(y) \delta(z). \quad (1.8)$$

Bu denklemde  $I$ ;  $x, y$  ve  $z$  nin fonksiyonudur. Hesaplama kolaylığı açısından,  $y=0$  etrafındaki simetriden dolayı Fourier cosinüs dönüşümü (denklem (1.6)) uygulanırsa,

$$\nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \phi(x, k_y, z)] - k_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, k_y, z) = -I \delta(x - x_s) \delta(z)$$

**Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.**

elde edilir. Yukardaki denklem açık şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma(x, z) \frac{\partial \phi(x, k_y, z)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma(x, z) \frac{\partial \phi(x, k_y, z)}{\partial z} \right] - k_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, k_y, z) = -I \delta(x - x_s) \delta(z) \quad (1.9)$$

Denklem (1.10) kullanılarak  $(x, k_y, z)$  uzayında farklı  $k_y$  değerleri için yalnızca  $x$  ve  $z$  değişkenlerine bağlı olan  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  hesaplanabilir. Elde edilen  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  değerleri kullanılarak (1.6) denklemi ile 3-B  $\phi(x, y, z)$  uzayına dönülür. Denklem (1.9) da  $k_y^2 \tilde{\phi}(x, k_y, z)$  terimi ile 2-B modele  $y$ - yönündeki katkı da eklenmiştir. Buna göre bu bağıntıyla yapılan modellemeye 2.5-B modelleme denilebilir.

SEY de diferansiyel denklemin integral denklemine dönüştürülmesi işlemi, varyasyonel yöntemler (variational methods) veya ağırlıklı rezidüel (method of weighted residual) yöntemlerden birisi kullanılarak yapılır. Burada varyasyonel yöntem kullanılacaktır.

Varyasyonel yöntemde diferansiyel denklemin integral denklemine dönüştürülmesinde "fonksiyonel" kavramı kullanılır. Fonksiyonel şu şekilde tanımlanabilir; eğer  $y$  değişkeni  $x$  in fonksiyonu ise ( $y = f(x)$ ),  $x$  in tanımlandığı bir bölgede,  $x$  in bütün değerleri için  $y$  hesaplanabilir.  $z$  değişkeni ise  $y'$  ye bağlı ( $z = y[f(x)]$ ) elde ediliyorsa,  $z'$  ye,  $y'$  nin fonksiyoneli denir. Fonksiyonel, bir değişkenin ayrık değerlerine karşı elde edilen fonksiyona bağlıdır.

Varyasyonel yöntem, fonksiyonelin tanımlanan alan içinde en küçüklenmesi esasına dayanır. DAÖ yönteminde alan enerjisi bir integral denklemi ile tanımlanır ve bu en küçüklenmeye çalışılır. Denklem (1.9) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir

$$F(\phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma(x, z) \frac{\partial \phi(x, k_y, z)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma(x, z) \frac{\partial \phi(x, k_y, z)}{\partial z} \right] - k_y^2 \sigma(x, z) \phi(x, k_y, z) + I \delta(x - x_s) \delta(z) = 0. \quad (1.10)$$

Burada  $F(\tilde{\phi})$ , bilinmeyen  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  bağlı fonksiyondur.

**Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.**

Denklem (1.10) da, akım yoğunluğunun normal bileşenin bütün eleman sınır yüzeylerinde sürekli olması sınır koşulu uygulanırsa, aşağıdaki fonksiyonel bağıntısı Ek-B de verilen birkaç matematiksel adım sonucu bulunur

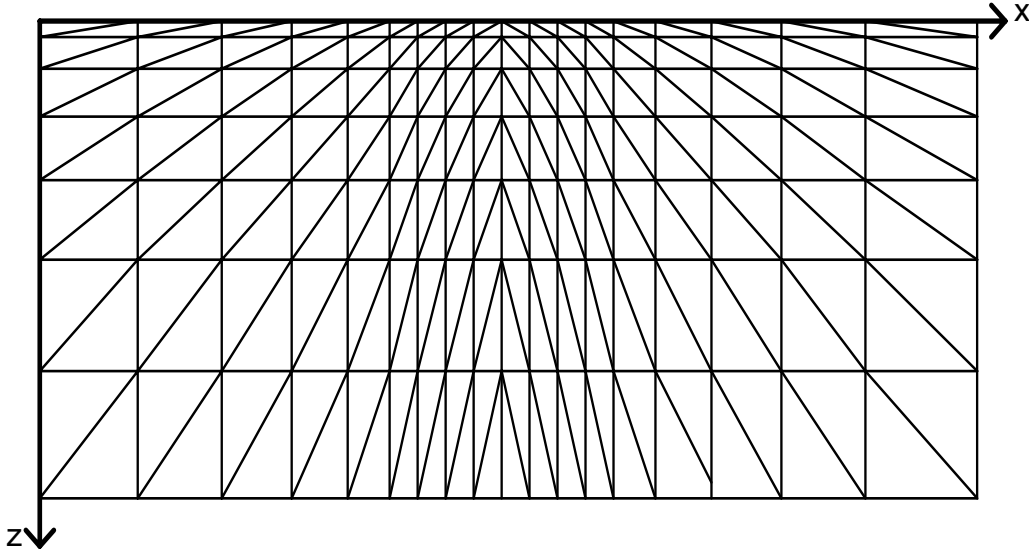
$$\chi = \frac{1}{2} \iint \left\{ \sigma \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(x, k_y, z)}{\partial x} \right)^2 + k_y^2 \tilde{\phi}^2(x, k_y, z) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}(x, k_y, z)}{\partial z} \right)^2 \right] + 2I \delta(x - x_s) \delta(z) \tilde{\phi}(x, k_y, z) \right\} dx dz . (1.11)$$

Düğüm noktalarındaki bilinmeyen gerilim değerleri denklem (1.12)' nin çözümü ile hesaplanacaktır. Bu bağıntının çözümü sabit bir  $k_y$  değeri için yapılır. Bundan sonraki bağıntılarda kolaylık açısından  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  yerine  $\tilde{\phi}(x, z)$  kullanılacaktır.

### 1.2.2. Alanın Elemanlara Ayrılması

İkinci aşamada, denklem (1.11) in tanımlı olduğu alan, eleman adı verilen sonlu sayıda küçük parçalara bölünür. Elemanlar birbirlerine belli sayıda noktalardan bağlıdır ve bilinmeyen değerler her eleman üzerinde belirlenen bu noktaların koordinat değerlerinde hesaplanırlar. Bilinmeyen değerlerin hesaplandığı bu noktalara düğüm noktası (node) denir. Birbirlerine düğüm noktalarından bağlı sonlu sayıda elemanın oluşturduğu alana sonlu elemanlar ağı (finite element mesh) adı verilir. Şekil 1.2' de doğrusal üçgen (linear triangle) elemanlara bölünmüş bir sonlu elemanlar ağı görülmektedir.

O



Şekil 1.2. Doğrusal üçgen elemanlara bölünmüş sonlu elemanlar ağının şematik gösterimi (Uchida, 1995).

Ağ üzerindeki elemanların boyutları ve sayısı ile düğüm noktası sayısı problemin çözümünde çok önemlidir. Elemanlara ayrılan alanda, düğüm noktaları ve elemanlar ayrı ayrı numaralandırılır. Dirichlet sınır koşulunu uygulamak için sonlu elemanlar ağının orta noktasından (O) sol, sağ ve aşağı yöne doğru gidildikçe elemanların boyutları artırılır.

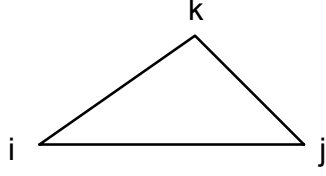
### 1.2.3. Eleman Dizey Denkleminin Elde Edilmesi

SEY 1-B, 2-B ve 3-B tanımlanan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için kullanılabilir. 1-B çözümde bir eğri düzgün doğru parçalarının bir serisi ile tanımlanır. 2-B çözümde üçgen veya dikdörtgen elemanlar yada her ikisinin birleşimi kullanılabilir. 3-B çözümde ise quadratik üçgen veya dikdörtgen şekilli elemanlar kullanılır. Burada 2-B modellemede kullanılan doğrusal üçgen eleman anlatılacaktır.

Doğrusal üçgen eleman Şekil 1.3' de görülmektedir. Bilinmeyen gerilim değerleri elemanın sadece köşe noktalarında tanımlandığından doğrusal üçgen denmektedir. Sonlu elemanlar ağı içinde elemanın şekline bağlı bir fonksiyon, Lagrangien veya Hermitien polinom yaklaşımı kullanılarak tanımlanır. Doğrusal üçgen eleman (Şekil 1.4) için bilinmeyen gerilim ( $\tilde{\phi}(x,z)$ ) değerlerini, Lagrangien polinom yaklaşımından aşağıdaki gibi yazılabilir.



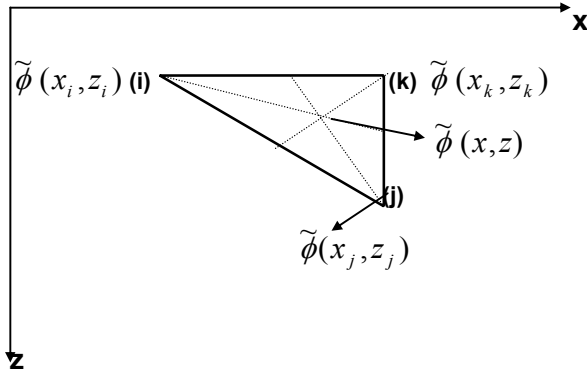
$$\tilde{\phi}(x, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 z = \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$



Şekil 1.3. Doğrusal üçgen eleman.

Doğrusal üçgen elemenda bilinmeyenler elemanın köşe noktalarında tanımlanır. Buna göre i, j ve k noktalarında tanımlı olan  $\tilde{\phi}(x, z)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir (Şekil 1.4).

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i(x_i, z_i) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 z_i \\ \tilde{\phi}_j(x_j, z_j) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 z_j \\ \tilde{\phi}_k(x_k, z_k) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 z_k \end{aligned} \quad (1.13)$$

Şekil 1.4. Doğrusal üçgen elemanın düğüm noktalarında  $\tilde{\phi}(x, z)$  nin tanımlanması.

Bundan sonra kısalık açısından

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= \tilde{\phi}(x_i, z_i) \\ \tilde{\phi}_j &= \tilde{\phi}(x_j, z_j) \\ \tilde{\phi}_k &= \tilde{\phi}(x_k, z_k) \\ \tilde{\phi} &= \tilde{\phi}(x, z) \end{aligned}$$

olarak kullanılacaktır. Bu denklemlerde  $\alpha_0, \alpha_1$  ve  $\alpha_2$  sabit katsayılarıdır. (1.7) denklem sistemi dizey formu şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

**Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.**

$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Yazılan bu dizey denkleminde  $\alpha_0, \alpha_1$  ve  $\alpha_2$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

şeklinde çözülür. Burada,  $\Delta$  doğrusal üçgenin alanıdır ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

Elemanın alanını pozitif hesaplayabilmek için düğüm noktaları saatin tersi yönünde numaralandırılır. a,b ve c sabitleri ise global koordinatlarda,

$$\begin{aligned} a_i &= x_j z_k - x_k z_j & b_i &= z_j - z_k & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k z_i - x_i z_k & b_j &= z_k - z_i & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i z_j - x_j z_i & b_k &= z_i - z_j & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

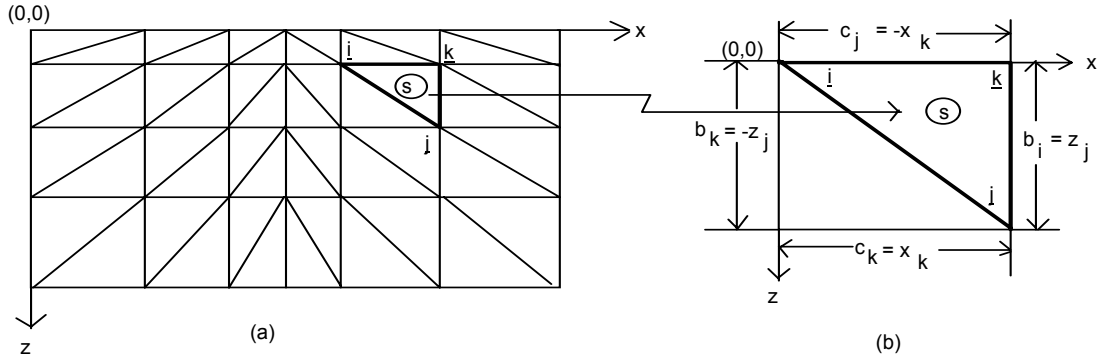
şeklinde çözülür. Burada,

$$b_i + b_j + b_k = c_i + c_j + c_k = 0$$

ve i- düğüm noktası merkez  $((x_i, z_i) = (0,0))$  olmak üzere

$$a_i = 2\Delta, \quad a_j = a_k = 0$$

olduğu görülmektedir. Genel (global) ve bölgesel (lokal) koordinatlarda yukardaki katsayılar, i- düğüm noktası merkez olmak üzere Şekil 1.5' de görülmektedir.



Şekil 1.5. Kartezyen koordinatlar sisteminde (x,z); Simgesel bir sonlu elemanlar ağı üzerinde s elemanı (a), bölgesel koordinatlarda s elemanının görünümü (b) (Fenner' den sonra 1975).

Denklem (1.9) da (x,z) koordinatlarına bağlı çözülen  $\alpha_0, \alpha_1$  ve  $\alpha_2$  değerleri, denklem (1.6) de yerine konursa,

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

elde edilir. Bu denkleme göre  $\tilde{\phi}(x,z)$  fonksiyonu alan içinde tanımlanan doğrusal üçgen elemanın düğüm noktalarında hesaplanmış  $\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j$  ve  $\tilde{\phi}_k$  ya bağlı olarak çözülebilir.  $\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j$  ve  $\tilde{\phi}_k$  nin yanında çarpan olarak bulunan değerler grubu,

$$\begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $N_i, N_j$  ve  $N_k$  değişkenleri şekil fonksiyonu, aradeğer fonksiyonu veya temel fonksiyon (shape functions, interpolation functions, or basis functions) olarak bilinir. Şekil fonksiyonlarının x ve z e bağlı türevleri sıfırdır. Her şekil fonksiyonunun ait olduğu düğüm noktasındaki değeri bire eşit veya birden küçüktür. Diğer düğüm noktalarındaki değeri ise sıfırdır. Bir elemana ait şekil fonksiyonlarının toplamı birdir. Her şekil fonksiyonu kendi düğüm noktası ile kendisine komşu düğüm noktalarının kenarları boyunca doğrusal olarak değişir. Şekil fonksiyonu

denklem (1.12) da görüldüğü gibi sadece elemanın koordinatlarına bağlıdır. Buna göre (1.17) denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tilde{\phi} = N_i \tilde{\phi}_i + N_j \tilde{\phi}_j + N_k \tilde{\phi}_k \quad (1.19)$$

Burada çözüm bölgesi içinde herhangi bir elemanın gerilimi, elemanın düğüm noktalarında tanımlanan gerilimler ve şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanmıştır.  $\tilde{\phi}(x, z)$  nin x ve z ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} (b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k) \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} (c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k) \quad (1.21)$$

elde edilir. (1.19), (1.20) ve (1.21) denklemleri (1.11) de yerine konursa,

$$\begin{aligned} X = & \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \frac{\sigma}{4\Delta^2} \left\{ (b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k)^2 + (c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k)^2 \right\} dx dz \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \sigma k^2 (N_i \tilde{\phi}_i + N_j \tilde{\phi}_j + N_k \tilde{\phi}_k)^2 dx dz + \iint_{\Delta} I_{\Delta} \delta(x - x_s) \delta(z) (N_i \tilde{\phi}_i + N_j \tilde{\phi}_j + N_k \tilde{\phi}_k) dx dz \end{aligned} \quad (1.22)$$

bulunur. Yukarıdaki integral denklemini doğrusal üçgenin alanı için yazılmıştır. Ek-C de verilen şekil fonksiyonunun özellikleri denklem (1.22) ye uygulanırsa,

$$\begin{aligned} X = & \frac{\sigma}{8\Delta} \left\{ (b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k)^2 + (c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k)^2 \right\} \\ & + \frac{1}{12} \sigma k^2 \Delta (\tilde{\phi}_i^2 + \tilde{\phi}_j^2 + \tilde{\phi}_k^2 + \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_j \tilde{\phi}_k + \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_k) + \frac{I_{\Delta}}{2\Delta} (a_i \tilde{\phi}_i + a_j \tilde{\phi}_j + a_k \tilde{\phi}_k) \end{aligned} \quad (1.23)$$

elde edilir. Enerjiyi en-küçüklemek (minimization) için (1.23) bağıntısının, bilinmeyen fonksiyonlara göre kısmi türevi alınarak sıfıra eşitlenir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \tilde{\phi}_i} = & \frac{\sigma}{4\Delta} \left\{ b_i (b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k) + c_i (c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k) \right\} \\ & + \frac{1}{12} \sigma k^2 \Delta (2\tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_k) + \frac{I_{\Delta}}{2\Delta} a_i = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\phi}_j} = \frac{\sigma}{4\Delta} \left\{ b_j (b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k) + c_j (c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k) \right\} + \frac{1}{12} \sigma k^2 \Delta (\tilde{\phi}_i + 2\tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_k) + \frac{I_\Delta}{2\Delta} a_j = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\phi}_k} = \frac{\sigma}{4\Delta} \left\{ b_k (b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k) + c_k (c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k) \right\} + \frac{1}{12} \sigma k^2 \Delta (\tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_j + 2\tilde{\phi}_k) + \frac{I_\Delta}{2\Delta} a_k = 0 \quad (1.26)$$

elde edilir. Bu denklemler, enerjinin en-küçüklenmesi için türetilen fonksiyonelin en-sınır (extramum) değerleridir. Hesaplanması gereken düğüm noktalarındaki  $(\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_k)$  değerleri yukardaki denklemlerin çözümünden elde edilir. Bu denklemler doğrusaldır ve çözümünde doğrusal olarak elde edilir (Coggon,1971).

Denklem (1.24), (1.25) ve (1.26) aşağıdaki gibi düzey denklemi biçimine getirilir.

$$\frac{\sigma}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \sigma k^2 \Delta \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{I_\Delta}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{bmatrix} = 0 \quad (1.27)$$

Bu denklem sonlu elemanlar ağı içinde bir doğrusal üçgen eleman için yazılmıştır. Denkleminde ilk toplamaya kadar olan bölümde ilk iki düzey çarpılırsa,

$$\frac{\sigma}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{1}{12} \sigma k^2 \Delta \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{I_\Delta}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{bmatrix} = 0 \quad (1.28)$$

elde edilir. A ve B satır ve sütun sayıları birbirine eşit ve C ninde satır sayısı A ve B nin sütun sayısına eşit üç düzey için

$$(A+B)C=AC+BC$$

özelliği yazılabilir. Bu özellik denklem (1.28) ye uygulanırsa, simgesel bir i- elemanı için aşağıdaki düzey denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} k_{11}^i & k_{12}^i & k_{13}^i \\ k_{21}^i & k_{22}^i & k_{23}^i \\ k_{31}^i & k_{32}^i & k_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^i \\ \tilde{\phi}_2^i \\ \tilde{\phi}_3^i \end{bmatrix} = I_{\Delta} \begin{bmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Bu denklem kısaca,

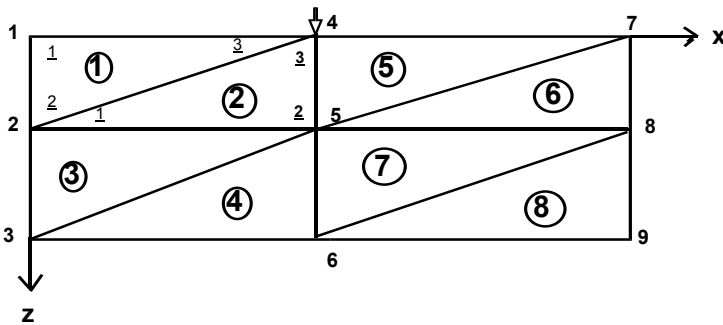
$$k^i \cdot u^i = s^i \quad (1.30)$$

şeklinde yazılabilir. Yukardaki denklemde i-elemanı için  $k^i$ , düğüm noktalarının koordinatlarına,  $k_y$  dönüşüm katsayısına ve elemanın öziletkenliğine bağlı katsayı dizeyi (stiffness matrix),  $u^i$  düğüm noktalarındaki gerilimlere bağlı  $(3 \times 1)$  boyutunda sütun vektör,  $s^i$  elemana uygulanan nokta akıma bağlı  $(3 \times 1)$  boyutunda sütun vektördür.

#### 1.2.4. Genel Dizey Denkleminin (Global Matrix Equation) Elde Edilmesi

Elemanlar düğüm noktalarından birbirine bağlı olduğundan, düğüm noktalarındaki gerilimler bir eleman için yazılan dizey denkleminin çözümüyle bulunamaz. Gerilimlerin hesaplanması için elemanlar için oluşturulan dizey denklemleri, sonlu elemanlar ağına bağlı birleştirilerek genel dizey denklemini oluşturulmalıdır. Oluşturulan genel dizey denklemini çözülerek düğüm noktalarındaki gerilimler hesaplanır.

Denklem (1.30) sonlu elemanlar ağındaki bütün elemanlar için türetilir. Sonlu elemanlarda amaç bütün elemanların katsayı dizelerini toplayarak, tüm yapının katsayı dizeyine dönüştürmektir. Bunu göstermek için Şekil 1.6 daki gibi  $(3 \times 3)$  boyutunda bir sonlu elemanlar ağı ele alınabilir.



Şekil 1.6. Sekiz doğrusal üçgen eleman ve dokuz düğüm noktası olan sonlu elemanlar ağı.

Burada ağın 8 elemanı ve yukardan aşağıya doğru numaralandırılmış 9 düğüm noktası vardır. Denklem (1.30) da görüldüğü gibi, bir eleman üzerinde üç düğüm noktası olduğundan katsayı dizeyleride  $(3 \times 3)$  boyutundadır. Bu dizeyleri birleştirerek tüm ağın katsayı dizeyi haline getirmek için düğüm noktası sayısı boyutunda  $(9 \times 9)$  bir kare dizeye gereksinim vardır. Katsayı dizeyini oluşturarak genel dizey denklemini elde etme işlemine "Doğrudan Rijitlik Yöntemi" denir. Burada bir elemana ait dizey denkleminde dizey ve vektörün satır ve sütun numarası (sonlu elemanlar ağında elemanın düğüm noktalarının numarası), dizey ve vektörün kenarlarına yazılır. Sonra sonlu elemanlar ağındaki düğüm noktası sayısı boyutunda bir kare dizey (katsayı dizeyi, coefficient- stiffness matrix) oluşturulur ve dizeyin bütün elemanlarına sıfır değeri atanır. Bundan sonra, her eleman için yazılmış denklemlerde dizeyin kenarına yazılan düğüm noktası numarası, katsayı dizeyinin satır ve sütun numarası olacak şekilde değerler yerleştirilir. Aynı satır ve sütun numarasına denk gelen değerler toplanır. Bu işlem bütün elemanlar için yapılır. Numaralandırma işlemi 1 numaralı eleman için yazılan dizey denkleminde görülmektedir.

Toplam sekiz eleman için elde edilen dizey denklemlerinin katkısı toplanarak, genel dizey denklemini

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 & K_{47} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{47} & K_{58} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} & 0 & K_{68} & K_{69} \\ 0 & 0 & 0 & K_{74} & K_{75} & 0 & K_{77} & K_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{96} & 0 & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.31.a)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;  $K_{11} = k^1_{11}$ ,  $K_{12} = k^1_{12}$ ,  $K_{13} = 0, \dots$ ,  $K_{21} = k^1_{21}$ ,  $K_{22} = k^1_{22} + k^2_{11} + k^3_{11}$ , ...,  $\phi_1 = \phi^1_1$ ,  $\phi_2 = \phi^1_2 + \phi^2_1$  e eşittir. Buna göre (1.31a) dizey denklemini genel olarak tanımlanan bir sonlu elemanlar ağı için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K_{(N \times N)} \cdot U_{(N \times 1)} = S_{(N \times 1)} \quad (1.31.b)$$

Burada  $N$  ağ üzerindeki düğüm noktası sayısı olmak üzere, (1.31) denkleminde  $K$  ( $N \times N$ ) boyutlu, pozitif değerli, simetrik-band dizeydir. Bu dizey sonlu elemanlar ağındaki tüm elemanların geometrisine ve öziletkenliğine bağlıdır. Dizeyin köşegen (diagonal) elemanları sıfırdan ( $K_{ii} > 0$ ) ve aynı sıradaki köşegen dışı terimlerden büyüktür. Dizeyde sıfır olmayan terimler köşegene yakındır ve bandın dışındaki bütün terimler sıfırdır.

$U$  sütun vektör bütün düğüm noktalarındaki bilinmeyen gerilim değerlerini içerir.  $S$  sütun vektör ise bütün düğüm noktalarındaki nokta akım kaynağının ve sınır koşullarından bilinen gerilim değerleri ile şekil fonksiyonunun çarpım değerlerini içermektedir.

Denklem (1.31) de görüldüğü gibi tek bir eleman için düğüm noktasında hesaplanan gerilim sadece o elemanın katkısıyla bulunur. Fakat sonlu elemanlar ağı üzerindeki bir düğüm noktasının gerilimi, denklem (1.31) ile o düğüm noktasına komşu tüm elemanların katkısıyla hesaplanır. Bu nedenle sonlu elemanlar ağındaki elemanların şekli ve düğüm noktası sayısı önemlidir. Sonlu elemanlar ağı üzerinde düğüm noktası sayısı ne kadar çok ise hesaplanan gerilimler modeli o kadar iyi temsil eder.

Yukarda görüldüğü gibi  $S$  vektöründe sadece dördüncü düğüm noktasını temsil eden elemanda değer vardır. Böylece kaynağın olduğu yerde Poisson denklemi sağlanmış olur. Diğer elemanlara sıfır değeri atayarak kaynağın olmadığı noktalarda Laplace denklemi sağlanmış olur. Ayrıca her düğüm noktası için yazılan denklemlerde düğüm noktasının komşu olmadığı noktalar için sıfır değeri atayarak sınırlarda Dirichlet sınır koşulu uygulanmış olur.

### 1.2.5. Gerilim Alanın Çözümü

Denklem (1.31) kaynak terimini içeren sütun vektörün sıfırdan farklı elemanları olduğundan homojen olmayan denklem takımıdır. Homojen olmayan denklem takımının çözümü dolaysız (direct) ve dolaylı (indirect, iterative) yöntemler olarak ikiye ayrılabilir. Dolaylı yöntemler hem algoritmalarının kolayca programlanabilir olması hem de yuvarlatma hatalarının az ve yineleme (iterasyon) yapıldıkça birikme olmaması bakımından çok kullanılır. Fakat bu yöntemlerde daima bir yakınsama (convergence) problemi vardır. Dolaysız yöntemler verilen katsayı dizeyinin elemanlarını işlemler sırasında değiştirirler ve başlangıçta çok sıfırlı (sparse) olan katsayı dizeyi sıfır elemanları daha az olan bir yoğun (dense) dizeye döndürür. Buna karşılık dolaylı yöntemler katsayı dizeyini değiştirmez. Bu nedenle büyük ( $N > 100$ ) ve çok sıfırlı katsayı dizeyi olan

*Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.*



denklem takımlarının çözümü için dolaylı yöntemlerin kullanılması önerilir. Fakat bu yöntemler çözüme yakınsamazsa dolaysız yöntemlerin kullanılması zorunludur.

Genel düzey denklemde, doğrudan katsayı dizeyinin tersi alınarak diğer tarafa çarpan olarak geçirilebilir ve çözüm daha hassas şekilde doğrudan bulunabilir. Fakat bu yöntem diğer dolaylı ve dolaysız çözüm yöntemlerinden daha fazla zaman alır. Yine de hızlı bir bilgisayar varsa bu yöntem ile çözüm tercih edilebilir.

Doğrusal cebirsel denklem takımının çözümünde kullanılacak yöntemin seçiminde; çözüm sırasında gereken işlem sayısı, çarpma ve bölme işlemleri sayısı, kolay programlanabilir olması, mümkün olduğu kadar az yuvarlatma hatası olması ve çözüm hızı özellikleri gözönünde tutulur. Genel düzey denklemi Cholesky Decomposition, Gauss eliminasyonu, LU-ayrıklaştırması (LU decomposition) vb. yöntemlerle çözülebilir.

" Cholesky decomposition" yöntemine göre, herhangi bir A dizeyinin elemanları, pozitif ve simetrik ise bu düzey

$$LL^T = A$$

şeklinde yazılabilir. Burada L dizeyi alt üçgen dizeyi,  $L^T$  ise L dizeyinin devriğini göstermektedir. L dizeyinin köşegen elemanları 1 dir. Burada,

$$L_{i,j} = 0 \quad (i - j > m)$$

$$L_{i,j}^T = L_{i,j}$$

dir. Buna göre Ax=b denklemi aşağıdaki şekilde adım adım

$$Ly = b \quad (1.32)$$

$$L^T x = y \quad (1.33)$$

çözülür. Denklem (1.32) ile önce y çözülür ve daha sonra çözüm (1.33)' de yerine konularak x bilinmeyen yöneyi bulunabilir. Bu yöntem özellikle n veri sayısı m parametre sayısından büyük olduğu ( $n \gg m$ ) durumlarda (alt üçgenlere bölme yöntemi) etkilidir. Burada ele alınan problem için

**Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.**

veri sayısı parametre sayısından fazladır. Bu yöntem Gauss eliminasyon yönteminden çok daha çabuk çözüme ulaşmaktadır (Dey ve Morrison 1979).

### 1.2.6. Gerilimin $(x, k_y, z)$ Uzayından $(x, y, z)$ Uzayına Dönüştürülmesi ve GÖ Hesabı

$(x, k_y, z)$  uzayından,  $(x, y, z)$  uzayına dönüşüm ile 2-B iletkenlik dağılımı nedeni ile oluşan üç boyutlu gerilim dağılımı hesaplanabilir. Dönüşüm işlemi Fourier cosinus dönüşümü ile gerçekleştirilebilir. Denklem (1.31) den hesaplanan gerilimler  $(\tilde{\phi}(x, k_y, z))$ ;  $(x, k_y, z)$  uzayında çözülmüştür. Bu değerlerin  $(x, y, z)$  uzayına dönüştürülmesi gerekmektedir. Dönüşüm işleminde kullanılan  $k_y$  nin seçimi deneme yanılma yolu ile yapılmaktadır. Bu değerler sıfır ile dört arasında seçilerek gerçekleştirilebilir. Fakat herhangi bir yer modeli için ağ boyutunun değişmesi (dx ve dz aralıklarının değişmesi) yeni  $k_y$  değerlerinin bulunmasını gerektirmektedir. Ayrıca aynı model için her farklı AB/2 değeri içinde  $k_y$  değerlerinin yeniden düzenlenmesi gerekmektedir.  $k_y$  değerleri deneme yanılma yöntemi ile bulunarak homojen bir model için doğru olup olmadığı bütün AB/2 değerlerinde kontrol edilmelidir.  $k_y$  değerlerinin kaç adet olması bir kurala bağlı değildir. Örneğin, Dey ve Morrison (1979) yaptıkları programda beş adet, Rodi(1976) yedi adet, Uchida (1995) ise ondört adet  $k_y$  değeri kullanmıştır. Uchide  $k_y$  değerlerini ağ boyutuna bağlı olarak tanımlamıştır. Her modelde  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  genel davranışı  $k_y = 0$  için asimptotik olarak düz bir tepki fonksiyonuna,  $k_y$  nin en büyük değeri için düzgün azalarak sıfıra asimptot olmaktadır. Dönüşüm işlemi  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  yi uygun bir üstel fonksiyona yaklaştırılarak  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  nin zarfını  $k_y$  'nin değerleri için  $(k_{y1} \leq k_y \leq k_{y2})$  analitik olarak

$$\int_{k_{y1}}^{k_{y2}} e^{-ak_y} \cos(k_y b) dk_y = \frac{e^{-ak_y}}{a^2 + b^2} [b \sin(bk_y) - a \cos(bk_y)] \Big|_{k_{y1}}^{k_{y2}}$$

ile yapılabilir. Çözülen  $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$  ler  $\phi(x, y, z)$  ye dönüştürüldükten sonra görünür öz direnç değerleri hesap edilebilir. Gerilim değerleri hesap edilirken farklı kaynak konumları için çözülen dizeyin yüzeye karşılık gelen elemanları daha sonra kullanılmak üzere saklanır.

Denklem (1.31)' de gerilimin hesaplandığı düğüm noktasıyla ilişkisi olmayan düğüm noktalarına karşılık gelen sütunlara sıfır değeri atanır. Bu durumda köşelerde Dirichlet sınır koşulu sağlanmış olur. Ayrıca nokta akım kaynağını içeren dizeyde kaynağın bulunmadığı noktalara

sıfır atamakla Laplace denklemi, nokta akım kaynağında ise Poisson denklemi sağlanmış olur (Pekşen 1996).

Denklem (2.3.14) ve (1.26) de katsayı dizeyi bir model için bir kez kurulum. Daha sonra nokta kaynak teriminin değişik konumları için bu denklem sistemi çözülerek istenilen modelin yeryüzünde oluşturacağı gerilim değerleri hesaplanabilir. Daha sonra aşağıdaki formül kullanılarak görünür özdirenç hesaplanır.

$$\rho_a = K \frac{\Delta\phi}{I} \quad K = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}\right)} \quad (1.34)$$

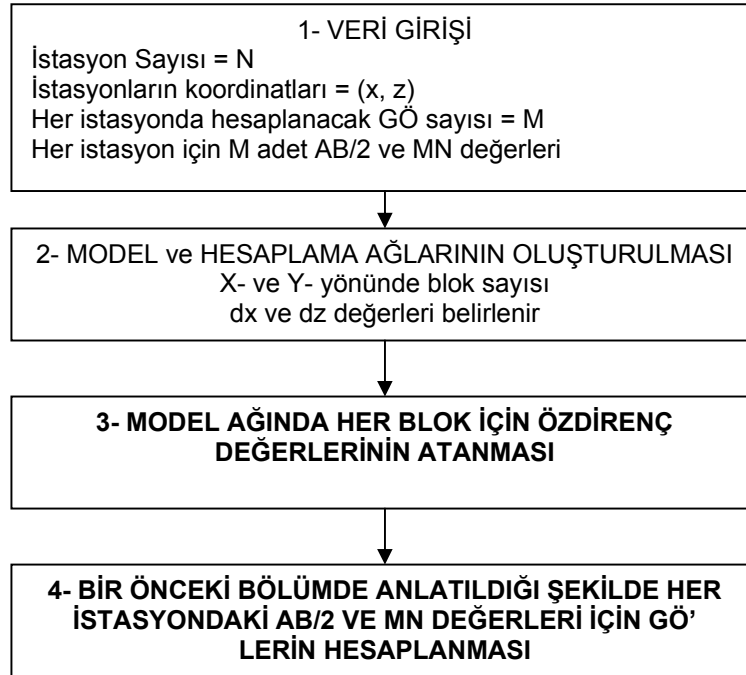
Burada K geometrik faktör olarak isimlendirilir ve uzaklık boyutundadır. Hesaplanan gerilim farkı elektrodlar arasındaki uzaklığa, yere uygulanan akıma ve homojen ortamın özdirencine bağlıdır. Fakat gerçekte yer homojen değildir ve arazide ölçülen gerilim farkı ( $\Delta\phi$ ) kullanılarak (1.34) denkleminde hesaplanan özdirenç; Görünür Özdirenç (GÖ) olarak adlandırılır. GÖ, jeolojik yapının şekline, özdirencine ve kullanılan elektrod dizilimine bağlıdır. GÖ tanımlamasına göre; ortam homojen ve izotrop ise ölçülen GÖ ortamın özdirencine eşit olmalıdır. Tabakalı bir ortamda GÖ eğrisi AB/2' nin küçük değerleri için birinci tabakanın özdirencine, AB/2' nin büyük değerleri için son tabakanın özdirencine asimtot olmalıdır. Ayrıca GÖ, AB/2 nin ara değerlerinde de ara tabakaların özdirencine yakın olmalıdır (Spies and Eggers 1986, Başokur 1994).

Arazide ölçülen gerilim farkları, homojen ve izotrop ortama ait olmadığından bundan sonraki bölümlerde GÖ kavramı ( $\rho_a = \rho$ ) kullanılacaktır.

### 1.3. DAÖ Yönteminde, 2-B Modelleme Uygulaması için Yararlı Bilgiler

2-B modelleme iki amaç için kullanılabilir. Birincisi, öngörülen bir jeolojik yapı üzerinde DAÖ ölçümlerinin nasıl olacağını görmek. Bu eskiden, hesaplanan ve arazide ölçülen GÖ değerlerini karşılaştırarak (deneme yanılma yöntemi) jeolojik modeli kestirmek için yapıldı. İkincisi, 2-B ters çözüm' de her yineleme için kuramsal görünür öz dirençleri hesaplamak. Günümüzde daha çok ikinci amaç için 2-B modelleme' den yararlanılmaktadır.

Buraya kadar DAÖ yönteminde 2-B modellemenin kuramsal temelleri verilmiştir. Burada ise uygulamada 2-B modellemenin nasıl yapıldığı Şekil 1.7' de verilen algoritmaya göre izleyen şekilde yapılır.



Şekil 1. 7 . DAÖ yönteminde 2-B modellemede izlenen adımları gösteren akış şeması.

Bir profil boyunca istasyon koordinatları ve her istasyonda seçilen elektrod dizilimi için GÖ değerlerinin hesaplanacağı AB/2 ve MN değerleri okunur. Örnek veri dosyası Tablo 1.1' de görülmektedir

**II. Tablo 1.1. 2-B modellemede kullanılan örnek veri dosyası**

9	(İstasyon Sayısı)			
1	5	10.0	0.0	(İstasyon No. , ölçü sayısı, x-koordinatı ve z-koordinatı)
No	AB/2	MN		
1	3	1		
2	5	1		
3	7	1		
4	8	1		
5	11	1		
2	6	20.0	0.0	(İstasyon No. , ölçü sayısı, x-koordinatı ve z-koordinatı)
No	AB/2	MN		
1	3	1		
2	5	1		
3	7	1		
4	8	1		
5	11	1		
6	13	1		
.				
.				
10	5	90.0	0.0	(İstasyon No. , ölçü sayısı, x-koordinatı ve z-koordinatı)
No	AB/2	MN		
1	3	1		
2	5	1		
3	7	1		
4	8	1		
5	11	1		

Bir düşey elektrik sondajı ölçüsünde, AB/2 mesafesi birkaç metreden yüzlerce metreye kadar seçilebilir. 2-B modelleme yaparken yanyana birden fazla istasyonun tanımlanacağı bir ağ düzenlemek ve bu ağı kullanarak düz çözümün yapılması çok büyük bellek kapasitesi olan çok hızlı bilgisayarları gerektirir. Bu nedenle iki ağ kullanılmaktadır. Bunlardan birisi model ağı (Model Mesh) (Şekil 1.8.a), diğeri ise sonlu elemanlar hesaplama ağıdır (Finite Element Calculation Mesh) (Şekil 1.8.b). Model ağına, öz direnç değeri bulunacak bloklar ve bu blokların boyutları tanımlıdır. Programda bu ağ oluşturulurken yanal yönde her istasyon arasına bir blok otomatik olarak yerleştirilir. Düşey yönde blok derinlikleri, ise sonlu elemanlar hesaplama ağındakine eşit olacak şekilde logaritmik olarak artmaktadır. Model ağı istasyon sayısı, istasyonlar arasındaki mesafe ve GÖ değerlerinin hesaplanacağı AB/2 ve MN değerleri gözönünde bulundurularak oluşturulur. Bu değerler kullanılarak Model ağı için x- ve z-yönündeki blok sayısı ile bu bloklarının boyutları (dx ve dz değerleri) tanımlanır. Tablo 1.2' de model ağı ile ilgili örnek bir dosya görülmektedir.

Sonlu elemanlar hesaplama ağı ise düz çözüm yapılırken kullanılan ve elemanların tanımlandığı ağıdır. Bu ağ, 2-B modellemede bir istasyon için kullanılır. GÖ değerlerinin hesaplanacağı istasyon, hesaplama ağı' nın merkezinde olacak şekilde, model ağı hesaplama ağının üzerine konur. Hesaplama ağı' nın elemanlarına, her elemana karşılık gelen model ağındaki blok' ların özdirenç değerleri atanır.

Modelleme programının doğru sonuç vermesi için hesaplama ağı aşağıdaki kurallara uygun oluşturulmalıdır.

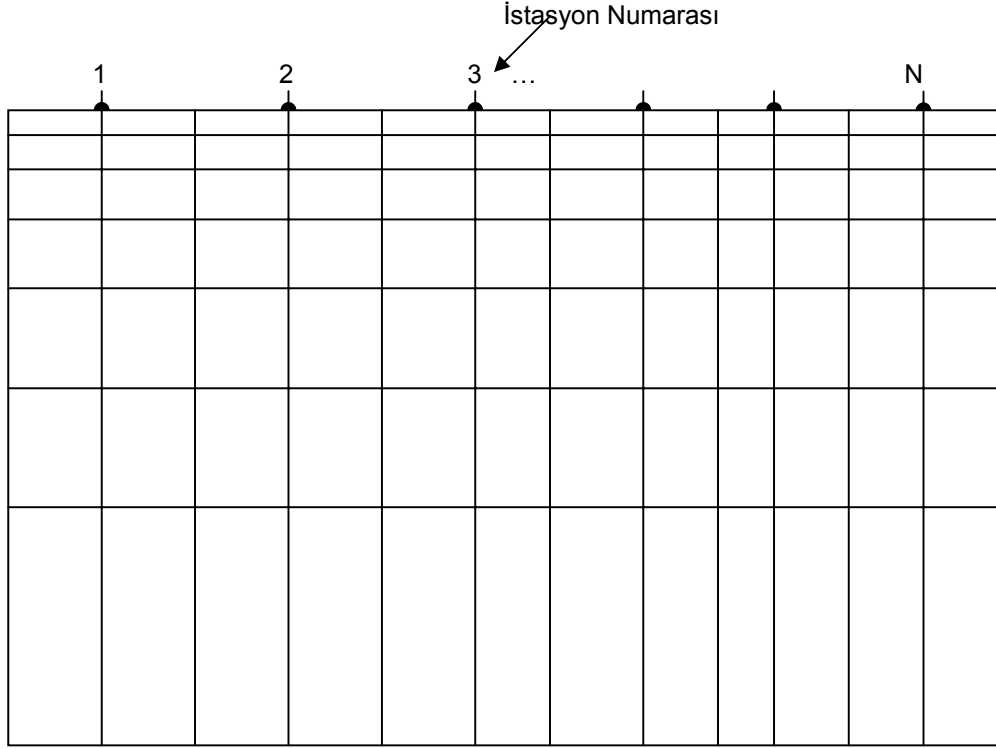
- a- Ağın merkezinde x- ve z-yönünde blok aralığı, en küçük MN değerinden küçük olmalıdır.
- b- Yanal ve düşey yönde, hücre aralıkları ardarda gelen iki AB/2 değerinin tek bir hücre içine düşmeyecek şekilde belirlenmelidir.
- c- Sınır koşullarının uygulanabilmesi için ağın sol-sağ ve alt sınırına yaklaştıkça hücrelerin boyutları logaritmik olarak artırılmalıdır.

Bu koşullar gözönüne alınarak oluşturulan model ve hesaplama ağları, test edilmelidir. Test işlemi için, model ağında bütün blok özdirençleri aynı alınır (homojen yarısonsuz model). GÖ tanımına göre homojen ortamda, ölçülen GÖ, ortamın özdirençine eşit olmalıdır. Örneğin, bütün blok özdirençlerinin 100 ohm-m alınması durumunda, düz çözüm sonucu hesaplanan GÖ değerleri en fazla %5 hata ile (95-105 ohm-m arasında) 100 ohm-m civarında olmalıdır. Eğer hata oranı daha yüksek ise model ve hesaplama ağı tekrar gözden geçirilmelidir. Ancak bu testi geçtikten sonra, istenen model için 2-B düz çözüm yapılmalıdır. Bu testin yapılmaması durumunda yanlış sonuçlar elde edilebilir.

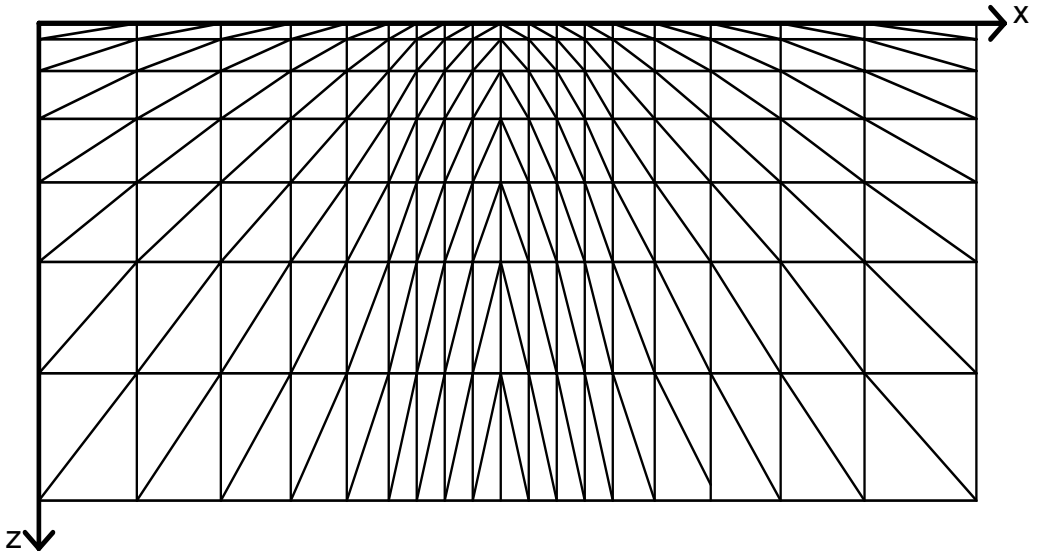
Günümüzde, model ve hesaplama ağı otomatik oluşturulmaktadır. Ayrıca model ağındaki blok özdirençleri grafik arayüzü programları ile kolayca oluşturulabilmektedir. Ancak yinede yukarıda sözü edilen testin yapılması şarttır.



(a)

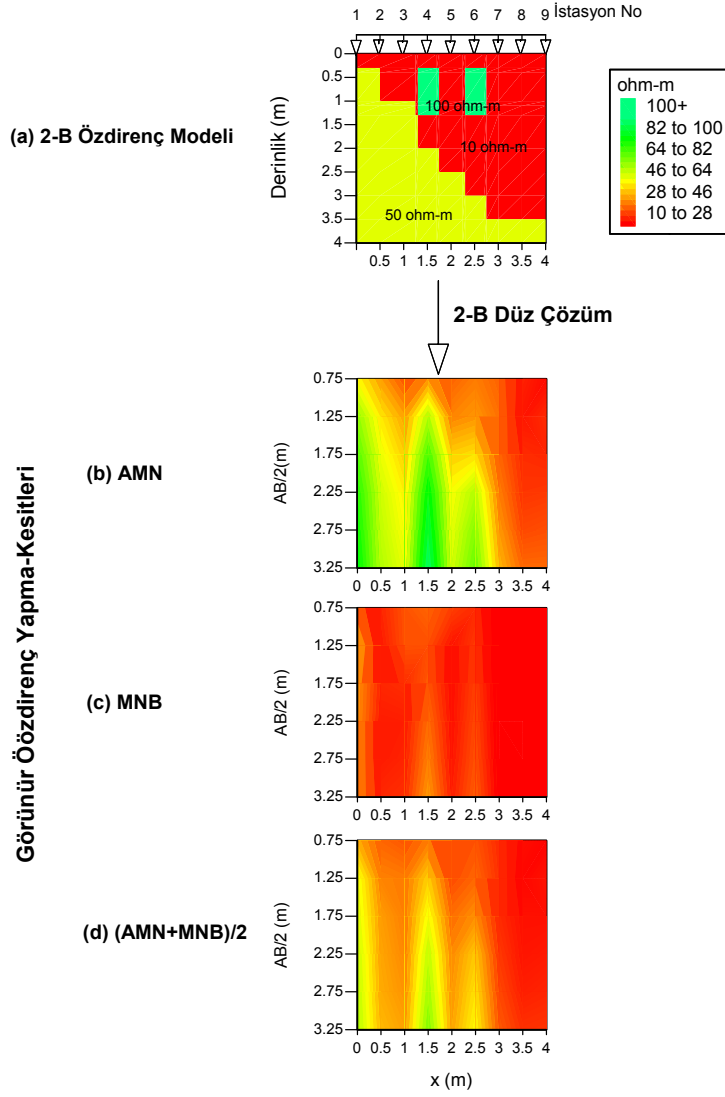


(b)



Şekil 1.8. Doğrusal üçgen elemanlara bölünmüş sonlu elemanlar hesaplama ağı (a) ve model ağı'nın (b) şematik gösterimi (Uchida ve Murakami, 1990).





Şekil 1.9. (a) 2-B özdirenç modeli, bu modelden 2-B düz çözüm sonucu (b) AMN, (c) MNB ve (d) (AMN+MNB)/2 GÖ yapma-kesitleri.

## 2. DAÖ VERİLERİNİN 2-B TERS ÇÖZÜMÜ

Ters çözüm, bir veriden, bu veriyi elde etmemizi sağlayan matematiksel modelin parametrelerini hesaplamak şeklinde tanımlanabilir. Genel olarak jeofizik problemler doğrusal değildir. Burada doğrusal olmayan problemlerin çözümünde kullanılan Yuvarlatılmış Sönümlü En-küçük kareler (smoothing) veya OCCAM olarak bilinen ters çözüm algoritması ile DAÖ verilerinin 2-B ters çözümü anlatılacaktır.

DAÖ yönteminde ters çözüm yaparken, yerinde özdirençlerin geniş aralıkta değişmesinden dolayı veri ve parametre uzayında logaritmalar alınır. 2-B ters çözümde bir doğrultu boyunca birden fazla istasyonda ölçülmüş görünür özdirenç verileri kullanılır. M adet parametre ve N adet ölçülen verinin logaritmaları

$$\begin{aligned} P_i &= \log p_i, \quad i=1, \dots, M \\ d_j &= \log \rho_{aj}, \quad j=1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilsin. Burada,  $p_i$  parametreleri (blok özdirençlerini),  $P_i$  parametrelerin logaritmasını,  $\rho_{aj}$  ise ölçülen görünür özdirenç verilerini ve  $P_i$  ise bu GÖ değerlerinin logaritmasını temsil etmektedir.

Ölçülen veri ( $d_j^{\text{Ölç.}}$ ) ile hesaplanan veri ( $d_j^{\text{Hes.}}$ ) arasındaki hata enerjisi (E)

$$E = \sum_{j=1}^N \left( d_j^{\text{Ölç.}} - d_j^{\text{Hes.}}(x) \right)^2 \quad (2.2)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.  $d_j(P_i)$  fonksiyonunun parametreler ( $P_i$ ) ile olan ilişkisini doğrusallaştırmak için Taylor serisine açılırsa ve yüksek dereceli terimler ihmal edilirse

$$d_j(P^k) = d_j(P^{(k-1)}) + \sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial d_j}{\partial P_i} \right)_{P^{(k-1)}} \Delta P_i^{(k)}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada "k" yineleme (iteration) numarasıdır. E'yi en-küçükleme için bilinmeyen parametrelere göre kısmi türevler alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial E}{\partial P_i} = 0 \quad (2.4)$$

Denklem (2.3) denklem (2.4) de yerine konursa ve bilinmeyen parametrelere ( $P_i$ ) göre kısmi türevler alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

**Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.**

$$\sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial y_j}{\partial P_i} \right)_{P^{(k-1)}} \left\{ d_j^{\text{Ölç.}} - d_j^{\text{Hes.}}(P^{(k-1)}) - \sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial d_j^{\text{ölç.}}}{\partial P_i} \right)_{P^{(k-1)}} \Delta P_i^{(k)} \right\} = 0 \quad (2.5)$$

Yukardaki denklemde  $\Delta P_i$  çözülür ve dizey formunda aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\Delta \mathbf{P}^{(k)} = \left( \left[ \mathbf{A}^{(k-1)} \right]^T \mathbf{A}^{(k-1)} \right)^{-1} \left[ \mathbf{A}^{(k-1)} \right]^T \Delta \mathbf{d}^{(k-1)} \quad (2.6)$$

Burada T- dizeyin devriğini (Transpose) göstermektedir. Yukardaki denklemde,

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{A}^{(k-1)} \right]_{jj} &= \left( \frac{\partial d_j^{\text{ölç.}}}{\partial P_i} \right)_{P^{(k-1)}}, \\ \left[ \Delta \mathbf{P}^{(k)} \right]_i &= P_i^{(k)} - P_i^{(k-1)}, \\ \left[ \Delta \mathbf{d}^{(k)} \right]_j &= d_j^{\text{Ölç.}} - d_j^{\text{Hes.}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ifade etmektedir. Denklem (2.6) en-küçük kareler veya Gauss-Newton çözümü olarak bilinir. Denklem (2.6)' da  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  dizey çarpımı sonucu tekil (singular) bir dizey elde edilebilir. Bu nedenle köşegen elemanlara bir katsayı eklenerek sönümlü en-küçük kareler çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Delta \mathbf{P}^{(k)} = \left( \left[ \mathbf{A}^{(k-1)} \right]^T \mathbf{A}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{I} \right)^{-1} \left[ \mathbf{A}^{(k-1)} \right]^T \Delta \mathbf{d}^{(k-1)} \quad (2.8)$$

elde edilir. Burada  $\lambda$  sönüm faktörü (damping factor) ve  $\mathbf{I}$  ise birim dizeydir. Ters çözüm sırasında her yineleme sonunda  $\lambda$  küçülebilir. Fakat, bloklar arası ani özdirenç değişimi veya olamayacak kadar çok yüksek veya çok düşük özdirenç değerlerinden dolayı kaba bir 2-B model elde edilebilir. Elde edilen bu model parametrelerinin düz çözümü ölçülen veri değerlerini sağlayacağı halde bu model gerçek yapıyı yansıtmaz.

Yukardaki gibi belirsizlikleri modelden kaldırmak için Sasaki (1981) denklem (2.8)' e yuvarlatma faktörü (smoothing factor) eklemiştir. Modelden belirsizlikleri kaldırmak için aşağıdaki gibi tanımlanan "Laplacian" süzgeç operatörü kullanılır.

$$\Delta \tilde{P}_i = \alpha_i \left( \Delta P_i^{\text{Sol}} + \Delta P_i^{\text{Sağ}} + \Delta P_i^{\text{Üst}} + \Delta P_i^{\text{Alt}} + 4\Delta P_i \right), \quad i=1, \dots, M \quad (2.9)$$

Burada, Sol,Sağ,Üst ve Alt indisleri i-ninci bloğa komşu olan blokları,  $\alpha_i$  ise yuvarlatma faktörünü göstermektedir. Denklem (2.9) tüm bloklar için uygulanırsa

$$\Delta\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{C}\Delta\mathbf{P} \quad (2.10)$$

elde edilir. Burada  $\mathbf{C}$ , MxM boyutlu yuvarlatma faktörlerini içeren kare dizeydir.  $\mathbf{C}^T$  ile yukardaki denklemi çarpıp, sonucu (2.3.12) denklemine eklersek

$$\Delta\mathbf{P}^{(k)} = \left( \left( \mathbf{A}^{(k-1)} \right)^T \mathbf{A}^{(k-1)} + \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right)^{-1} \left[ \mathbf{A}^{(k-1)} \right]^T \Delta\mathbf{d}^{(k-1)} \quad (2.11)$$

elde edilir. Bu çözüm yuvarlatılmış sönümlü en-küçük kareler ters çözümü (smoothing or OCCAM inversion) olarak bilinir.

Burada kısmi türev ifadesi ( $\partial d_j / \partial P_i$ ), gerçel verinin logaritmik hesabından aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\frac{\partial d_j}{\partial P_i} = \frac{p_i}{\rho_{aj}} \frac{\partial \log \rho_{aj}}{\partial \log p_i} \quad (2.12)$$

Ters çözüm' ün ilk adımında, önkestirim parametreleri ile düz çözüm yapılır. Bu konu bir önceki bölümde anlatılmıştır. Hesaplanan veri ile ölçülen veri kullanılarak hata (misfit) ( $\Delta d^{(1)}$ ) hesaplanır. Ayrıca Jakobiye dizeyin elemanları olan, verinin parametrelere göre kısmi türevleri de ( $\partial d_j / \partial P_i$ ) düz çözüm sırasında hesaplanır. Elde edilen değerler, denklem (2.11)' de yerine konarak  $\Delta\mathbf{P}^{(2)}$  değeri çözülür ve bu değer kullanılarak yeni parametre aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbf{p}_i^{(2)} = \mathbf{p}_i^{(1)} e^{\left( \Delta P_i^{(2)} \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2.13)$$

Yineleme; hata (misfit), tanımlanan limit' den küçük oluncaya kadar devam eder.

## 2.1. Kısmi Türevler İçeren Dizeyin Hesaplanması

DAÖ verilerinin 2-B ters çözümü' nde kısmi türevlerin hesaplanması çok zaman almaktadır. Bu nedenle genelde karşılıklı (reciprocity) teorisinden yararlanır. Bu teoriye göre, yeryüzüne yerleştirilen akım ve gerilim elektrodları birbirinin yerini aldığı anda ölçülen GÖ değeri değişmez. Genel dizey denklemi, L adet düğüm noktası için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum_{j=1}^L k_{ij} \hat{\phi}_j = s_i, \quad i = 1, \dots, L, \quad (2.14)$$

Burada sırasıyla  $k_{ij}$  düğüm noktalarının koordinatlarına bağlı katsayılarıdır ve  $K$  dizeyinin (matrix) elemanı,  $\hat{\phi}_j$  düğüm noktalarındaki gerilim değerleridir ve  $v$  dizeyinin elemanı ve  $s_i$  ise düğüm noktalarındaki kaynak terimi ile ilgilidir ve  $s$  dizeyinin elemanıdır. Denklem (2.14) ün parametrelere ( $p_i$ ,  $i=1, \dots, M$ ) göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenirse,  $s_i$  değerlerinin parametrelere göre türevi sıfır olur ve

$$\sum_{j=1}^L k_{ij} \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial p_i} = - \sum_{j=1}^L \frac{\partial k_{ij}}{\partial p_i} \hat{\phi}_j \quad (2.15)$$

elde edilir. Burada  $M$  parametre sayısıdır. Bu denklem dizey formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}' = -\mathbf{K}' \cdot \mathbf{v}$$

Burada,

$$[\mathbf{v}']_j = \frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial p_i} \quad \text{ve} \quad [\mathbf{K}']_{ij} = \frac{\partial k_{ij}}{\partial p_i} \quad (2.16)$$

dır.  $\partial k_{ij} / \partial p_i$  türevleri sonlu elemanların geometrisinden elde edilebilir. Burada  $\mathbf{K}$  dizeyininin  $i$ -ninci elemanı, sonlu elemanlar ağındaki  $m$ -ninci eleman ile ilişkili değilse türev sıfır olur. Denklem (2.13)' nın sağ tarafı, (2.31) denklemindeki kaynak vektörü olarak ele alınır ve buradan  $\mathbf{K}'$  dizeyi çözülür. Çözülen değerler  $\mathbf{v}'$  vektörü ile çarpılır ve elde edilen değer (2.16) denkleminde eşitlenirse. Buradan  $\mathbf{K}$  nın tersi alınarak potansiyel değerlerinin türevleri ( $\partial \hat{\phi}_j / \partial p_i$ ),  $(x, y, z)$  ortamında hesaplanabilir. Bu değerlerin ters Fourier cosinus dönüşümü alınarak  $(x, y, z)$  uzayında  $\partial d_j / \partial \phi(x, y, z)_i$  türev değerleri hesaplanabilir. Daha sonra

$$\rho_{aj} = k \frac{\Delta \phi}{I} \quad \text{ise} \quad \frac{\partial d_j}{\partial p_i} = \frac{p_i}{\rho_{aj}} \frac{\partial \rho_{aj}}{\partial p_i} = \frac{k p_i}{I \rho_{aj}} \frac{\partial \Delta \phi_{aj}}{\partial p_i}$$

elde edilebilir.

## 2.2. Programın Akış Şeması

Genel olarak ters çözüm programının akış şeması Şekil 2.11' de görülmektedir. Programın akışı maddeler halinde aşağıdaki gibidir.

1-) Ölçülen GÖ verileri okunur. 2-B model, kullanılan maximum  $AB/2$  ve istasyonlar arası mesafeye göre düzenlenir.

2-) Sonlu elemanlar algoritmasının varsa sayısal hesaplama hatalarını görmek için homojen yarısız ortamın öz direnci 100 ohm-m için düz çözüm yapılır. Düz çözüm algoritması, GÖ değerlerini, homojen ortamın öz direncinden %2-5 hata ile aynı hesaplar. Hata'nın sebebi Ters Fourier dönüşümünün tam olarak kullanılmamasıdır. Daha fazla  $k_y$  dönüşüm katsayısı kullanılırsa, çözüm daha hassas bulunabilir.

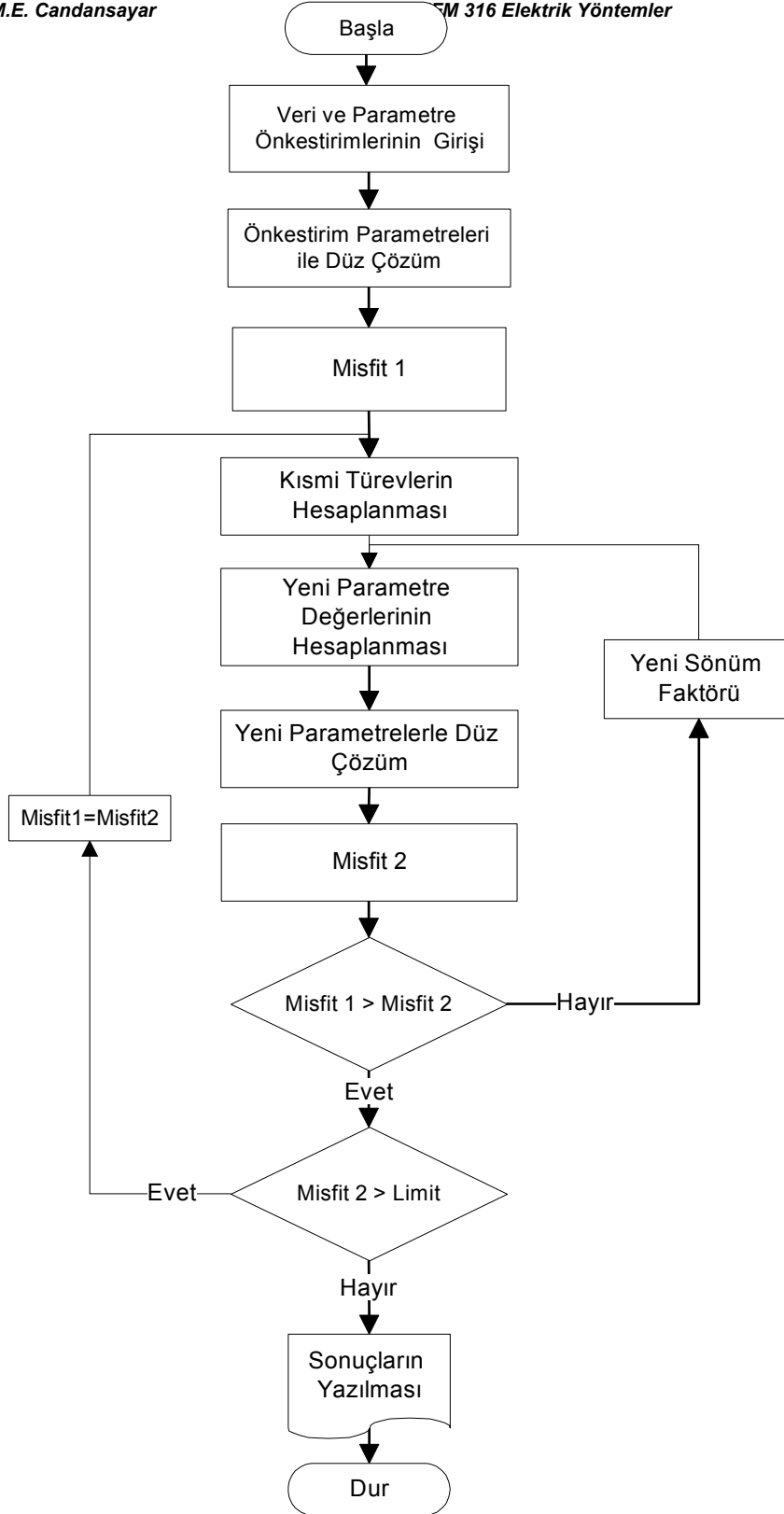
3) Önkestirim modeli (genelde homojen yarı sonsuz ortam) ile her istasyon için 2-B düz çözüm ile bütün AB/2 değerleri için GÖ ve  $\Delta d$ -misfit1 değerleri hesaplanır.

4-) 'Reciprocity' teoremi ile GÖ'lerin parametrelere göre kısmi türevleri hesaplanır. Tüm misfit'ler ve kısmi türevler kullanılarak denklem (2.10) oluşturulur.

5-) Denklem (2.10)'nun çözümü ile sonlu 2-B model ağındaki her eleman için  $\Delta P$  değerleri hesaplanır. Bu çözümde,  $\alpha$  - yuvarlatma faktörü ve  $\lambda$  -sönüm faktörü belli kriterler altında değiştirilerek en uygun  $\Delta P$  değeri hesaplanır. Bu değer kullanılarak yeni parametreler değerleri (öz dirençler) hesaplanır.

6-) Yeni parametreler kullanılarak düz çözüm yapılır ve yeni hata enerjisi hesaplanır. Eğer yeni E değeri öncekinden büyükse yineleme durdurulur ve önceki model sonuç model olarak alınır. Eğer yeni E değeri, bir önceki E değerinden ve verilen limit'den de küçükse program durur. Bulunan parametreler ise çözüm olarak sonuç dosyasına yazılır. Eğer yeni E değeri verilen limit'den büyük ise 4 ve 6. adımlar arası farklı  $\alpha$  ve  $\lambda$  değerleri için tekrarlanır.

Toplam eleman sayısı, çözümün bulunmasında etkilidir. Eğer derindeki blokların hesaplanan GÖ değerine etkisi küçük ise, bu elemanlar için kısmi türevler de küçük hesaplanır. Bunun sonucu Jacobian dizeyi durağan olmaz. Fakat,  $\alpha$ 'nın kullanımı bu durağansızlığı ortadan kaldırır.



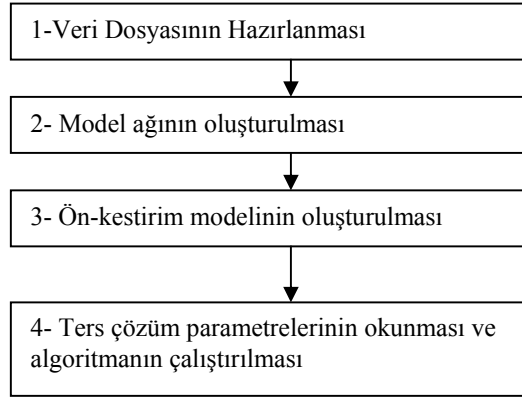
Şekil 12.11. Ters çözüm algoritması

### 2.3. DAÖ verilerinin 2-B Ters Çözümü' nde Pratik Bilgiler

DAÖ verilerinin (GÖ değerleri) 2-B ters çözümünü yapabilmek için, bir doğrultu boyunca ölçülmüş sondaj-profil verilerine ihtiyaç vardır. Bu veriler ile nitel yorumlama yapmak için, yatay eksen, istasyonlar arasındaki mesafe ve düşey eksen AB/2 olacak şekilde (Dipol-dipol için n-değeri) yapma-kesit adı verilen grafikler elde edilir. Fakat, günümüzde sondaj-profil ölçü sistemi ile ölçülmüş DAÖ verilerinin nicel yorumu yapılmaktadır. Nicel yorum için ise bu verilerin 2-B ters çözümü yapılmalıdır. Ters çözüm sonucu elde edilen 2-B yer-elektrik modelleri nitel yorumlamada kullanılır.

GÖ yapma-kesit verilerinin 2-B ters çözümünü yaparken şu konulara dikkat edilmelidir:

- i- 2-B ters çözümde kullanılan yapma-kesit verileri bir doğrultu boyunca ölçülmelidir. Ayrıca, tüm istasyonlarda ölçülen GÖ değerlerini ölçerken, akım ve potansiyel elektrodları her zaman doğrultu boyunca olmalıdır.
- ii- İstasyonlar arasındaki mesafeler, ölçü alınırken kullanılan AB/2 ve MN değerleri gözününde bulundurularak model ağı oluşturulur. Bu konu bir önceki bölümde anlatılmıştır.
- iii- Her istasyon için ayrıca oluşturulan hesaplama ağına ise, yanal yönde blok kalınlığı, en küçük MN mesafesinden büyük olmalıdır.
- iv- Model ağı ve hesaplama ağına düşey yönde son blok derinliği, en büyük AB/2 değerinden büyük olmalıdır.



Şekil 2.2. 2-B ters çözüm' de izlenen adımlar

Model ağı oluşturulup bir önceki bölümde anlatıldığı gibi test edildikten sonra, ölçülen verilerin ters çözümü yapılabilir. Ters çözüm sonucu model ağındaki bloklara ait öz dirençler bulunur. Bu öz direnç değerleri ile düşey eksen derinlik, yatay eksen ise uzaklık olacak şekilde çizilen 2-B yer-elektrik modelleri elde edilir. 2-B ters çözümün aşamaları aşağıdaki akış şemasında verilmektedir. Bu aşamaların ayrıntıları izleyen alt başlıklarda verilmektedir.



### 2.3.1. Veri Dosyasının Hazırlanması

Arazide bir doğrultu boyunca ölçülen GÖ verileri, 2-B ters çözüm algoritması için hazırlanır. Tablo 2.1' de, Schlumberger elektrod dizilimine göre ölçülmüş örnek bir veri dosyası görülmektedir. Burada, MN-değerlerinin değişmediği görülmektedir. Schlumberger elektrod diziliminde, elektrik alan ölçülmek istendiğinden  $\overline{MN}$  mesafesinin  $\overline{AB/2}$  mesafesine göre çok küçük olması gerekir. Fakat uygulamada, AB/2 mesafesi artırıldıkça, artık gerilim farkı aletin ölçemeyeceği kadar küçülür. Bu durumda  $\overline{MN}$  mesafesi artırılır. Böylece, farklı  $\overline{MN}$  mesafeleri için farklı GÖ eğrileri elde edilir. Ters çözüm işleminden önce bu eğrilerin birleştirilmesi gerekmektedir. Bu konu, DAÖ isimli bilgi notunda, bölüm 6.3' de anlatılmaktadır.

Tablo 2.1. 2-B ters çözüm programı için örnek veri dosyası.

Açıklama	: Örnek veri dosyası		
9	: ölçü istasyonu sayısı		
1 12 100.0 0.0	: İstasyon No., Ölçü Sayısı, merkezin x-ve z-koordinatı		
NO	AB/2	MN/2	GÖ(OHM-M)
1	5.0	1.0	263.1
2	6.0	1.0	171.3
3	8.0	1.0	106.1
4	10.0	1.0	88.3
5	12.0	1.0	82.7
6	15.0	1.0	78.5
7	20.0	1.0	80.2
8	25.0	1.0	84.3
9	25.0	3.0	92.6
10	30.0	1.0	86.1
11	30.0	3.0	94.7
12	40.0	3.0	98.3
.			
.			
9 12 900.0 0.0	: İstasyon No., Ölçü Sayısı, merkezin x-ve z-koordinatı		
NO	AB/2	MN/2	GÖ(OHM-M)
1	5.0	1.0	263.1
2	6.0	1.0	171.3
3	8.0	1.0	106.1
4	10.0	1.0	88.3
5	12.0	1.0	82.7
6	15.0	1.0	78.5
7	20.0	1.0	80.2
8	25.0	1.0	84.3
9	25.0	3.0	92.6
10	30.0	1.0	86.1
11	30.0	3.0	94.7
12	40.0	3.0	98.3

### 2.3.2. Model ağının oluşturulması

Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.

Model ağı, veri dosyasında okunan istasyon sayısı, istasyon arasındaki mesafe, AB/2 ve MN değerleri ile otomatik olarak oluşturulabilir. Bu konunun ayrıntısı Bölüm 1.3' de verilmiştir.

### 2.3.3. Ön-kestirim modelinin oluşturulması

Model ağı oluşturulduktan sonra, ağdaki her blok' a özdirenç değeri atanır. Böylece ön-kestirim modeli oluşturulmuş olur. Eğer, ölçüm yapılan alanda önceden yapılmış başka jeofizik çalışmalar, mekanik sondaj veya jeolojik araştırma varsa, bu bilgiler kullanılarak bir ön-kestirim modeli oluşturulabilir. Ancak, çalışılan alan hakkında bir bilgi yoksa ön-kestirim modeli olarak homojen ortam alınır. Yani tüm bloklara aynı özdirenç değeri atanır. Uygulamada, genelde ikinci durum sözkonusudur.

### 2.3.4. Ters çözüm parametrelerinin okunması ve algoritmanın çalıştırılması

Giriş verisi ve ön-kestirim modeli bilgilerini içeren model dosyası oluşturulduktan sonra, ayrıca, ters çözüm algoritması için gerekli parametreleri içeren bir dosya oluşturulur. Bu dosyaya örnek Tablo 2.2' de görülmektedir.

*Tablo 2.2. 2-B ters çözüm algoritması için gerekli parametreleri içeren dosya örneği.*

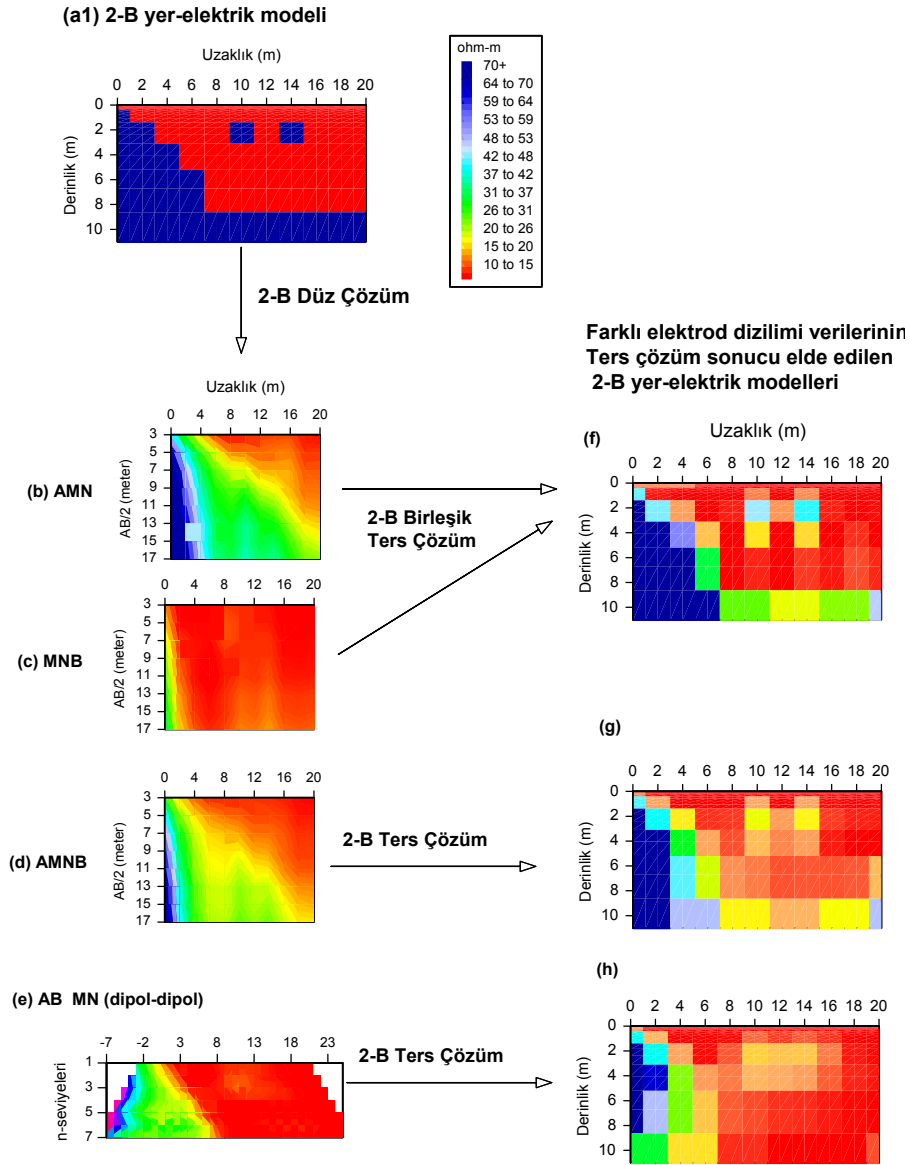
0	: JOBFLG (I2) (1:inversion, 0:forward)
10	: En büyük yinleme sayısı
100.0	: Ön-kestirim modeli için homojen ortamın özdirenç
1	: MODE (I2) (1: model ağı otomatik oluşturulacak 0: model ağı bilgileri dosyadan okunacak)

## 2.4. Uygulama Örnekleri

Bu bölümde, 2-B ters çözümün, pratikte nasıl yapıldığını daha iyi anlaşılması için birkaç uygulama örneği verilecektir.

### 2.4.1. Yapay Veri Uygulaması

Bu bölümde öncelikle 2-B modelleme ile oluşturulan yapay verinin 2-B ters çözümü ile ilgili iki uygulama örneği verilecektir. Daha sonra arkeolojik bir sahada ölçülen DAÖ verilerinin 2-B ters çözüm sonuçları verilecektir.

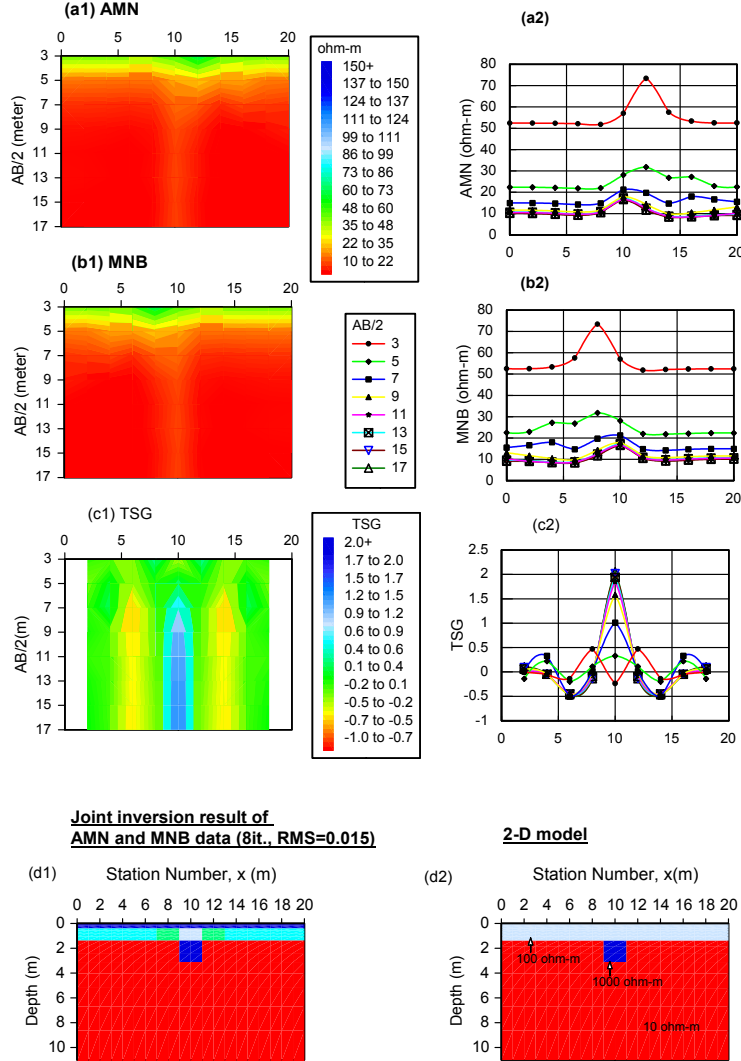


Şekil 2.3. Farklı elektrod dizimlerine göre yapılan 2-B ters çözüm sonuçlarının karşılaştırılması (Candansayar ve Başokur 2001).

Şekil 2.3.a' da eğimli arayüzeyle iki-tabakalı model görülmektedir. Örtü tabakasının özdirenci 10 ohm-m, temelin özdirenci ise 100 ohm-m' dir. Ayrıca, ilk tabakaya gömülü 1m derinlikte 2x2m boyutlarında, aralarında 2m mesafe olan 100 ohm-m özdirençli iki yapı görülmektedir. Bu model için, 2-B düz çözüm ile iki-yönlü üç elektrod dizilimi (AMN, MNB), Wenner-Schlumberger (AMNB) ve dipol-dipol (AB MN) elektrod dizilimleri için GÖ değerleri görülmektedir (Şekil 2.3.b,c,d,e). Wenner-Schlumberger ve dipol-dipol elektrod dizilimi verilerinin 2-B ters çözümü sonucu bulunan modellerde (Şekil 2.3.g ve h) gömülü yapılar ve arayüzey belirgin gözlenememektedir. Fakat, AMN ve MNB elektrod dizimlerinin 2-B birleşik ters çözümü sonucu bulunan yer-elektrik modeli, gerçek modeli en iyi yansıtmaktadır (Şekil 2.3.f). Bu uygulama, iki-yönlü üç-elektrod dizilimi verilerinin gömülü yapıların bulunmasında, geleneksel dizimlerden daha iyi sonuç verdiğini göstermektedir. Bu uygulamada gerçek model ile ters çözüm sonucu elde edilen modeller

Ankara Üniv. Müh.Fak. Jeofizik Müh.Böl., 06100- Tandoğan  
Bu notu yazardan habersiz fotokopi ile çoğaltmak yasaktır.

birebir aynı değildir. Bunun nedeni, 2-B modelleme ve ters çözümde yapılan varsayımlar, sayısal hesaplamalardaki hatalar ve bilgisayar kesme hatasıdır (roundoff error).



Şekil 2.4. (a1) AMN, (b1) MNB ve (c1) TSG yapma kesitleri, (a2) AMN, (b2) MNB ve (c2) TSG eğrileri profil, (d1) 2-B ters çözüm sonucu bulunan model, (d2) Gerçek model

Şekil 2.4.d2' de yüzeyden itibaren 100 ve 10 ohm-m özdirençli iki-tabakalı model görülmektedir. Ayrıca, temelde gömülü, 1.5 metre derinlikte 2x2m boyutlarında, 1000 ohm-m özdirençli bir yapı görülmektedir. Bu model için, 2-B düz çözüm ile iki-yönlü üç elektrod dizilimi (AMN, MNB) için

GÖ yapma kesitleri ve her AB/2 seviyesi için çizilmiş profil eğrileri görülmektedir. (Şekil 2.4.a1,a2,b1,b2).

Yapma kesit ve profil eğrilerinde gömülü cismin etkisi (bir belirti) görülmemektedir. Bunun sebebi, 1temele göre öz direnci büyük olan yüzey tabakası, gömülü yapıyı maskeleymiştir.

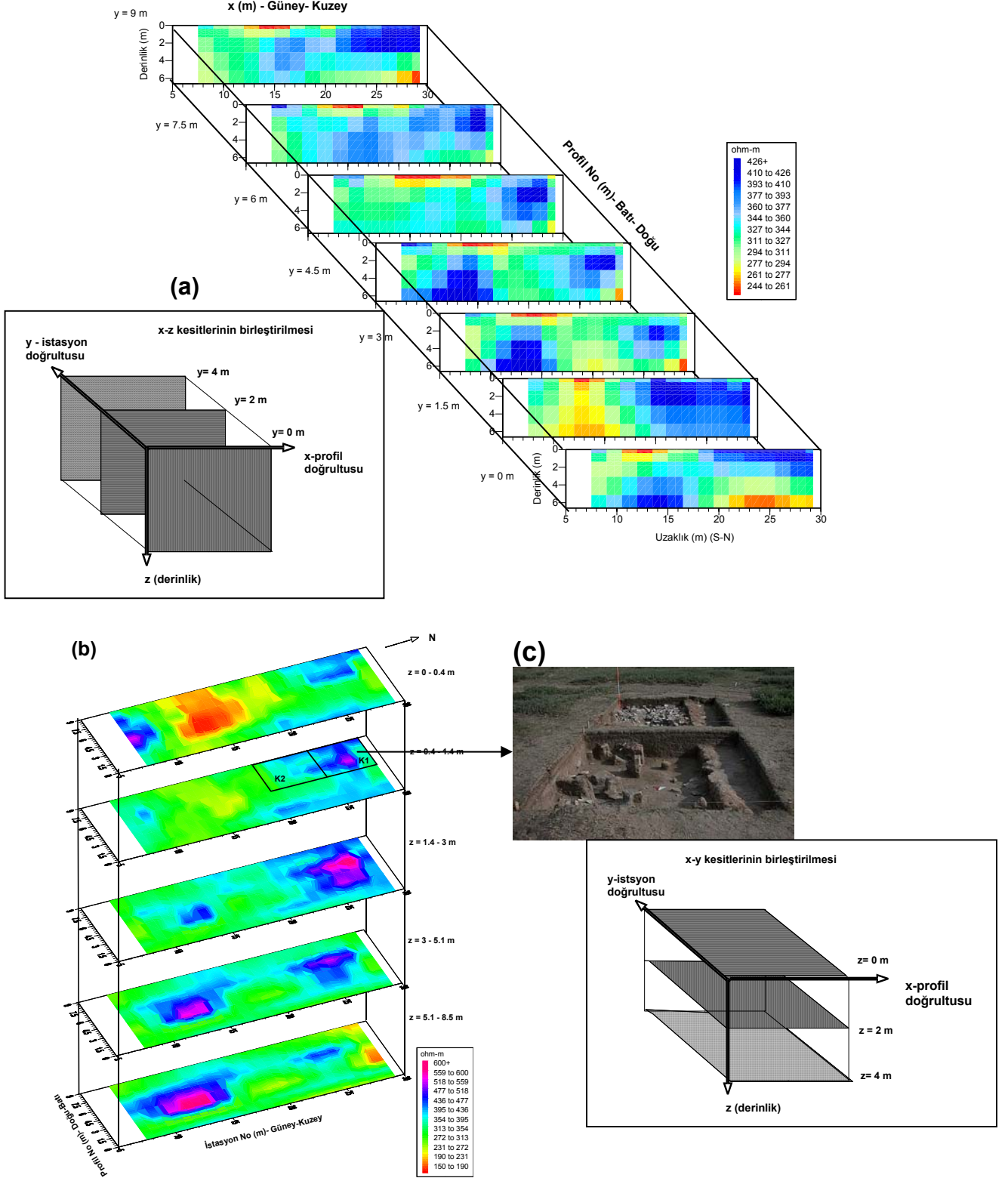
AMN ve MNB GÖ değerleri kullanılarak elde edilen TSG yapma kesitlerinde ise tabakalı yapının etkisinin yok olduğunu, gömülü cismin etkisinin belirginleştiği görülmektedir (Şekil 2.4. c1,c2). Fakat TSG dönüşümü, sadece cismin yeri hakkında bilgi vermektedir. Bu bilgi nitel yorum için ve 2B ters çözümde önkestirim modeli oluşturmada kullanılabilir. AMN ve MNB elektrod dizilimlerinin 2-B birleşik ters çözümü sonucu bulunan yer-elektrik modeli Şekil 2.4.d1' de görülmektedir. Ters çözüm ile gerçek modele çok benzeyen bir model görülmektedir.

#### 2.4.2. Moğolistan' da Yapılan DAÖ çalışması

Ters çözüm konusunda arazi uygulaması olarak, Moğolistan'da bulunan Orhun Anıtları etrafında yapılan çalışma verilecektir.

Burada sadece, Bilge Kağan anıtının 65 metre kuzeyinde bulunan, alanın 2-B ters çözüm sonuçları verilmiştir. GÖ değerleri sondaj-profil ölçü tekniği ile çok-elektrodlü ölçü düzeneği kullanılarak, İYÜE dizilimi için toplam 7 doğrultu boyunca alınmıştır. Ölçü aralığı ve doğrultular arasındaki mesafe 1.5m seçilmiş ve  $AB/2 = 2.25, 3.75, 5.25, 6.75$  ve  $8.25$  m ( $n=5$ ) ve  $a=MN=1.5$  m değerleri için toplam beş seviye için GÖ değerleri elde edilmiştir. Ölçülen veriler ile yapma-kesit ve seviye haritaları elde edilmiştir. Bu grafikler ile yapılan nitel yorum ile bir sonuç elde edilememiştir.

İYÜE dizilimi verilerinin 2-B birleşik ters çözümü her doğrultudaki AMN ve MNB GÖ yapma-kesit verileri kullanılarak yapılmıştır. Toplam yedi doğrultu için ters çözüm sonuçları Şekil 9' da görülmektedir. Burada tüm modeller yanyana (x-z kesitleri olarak) çizilerek 3-B (x-y ve z-derinlik) bir görüntü elde edilmiştir. Bütün ters çözümlerde aynı model ağı kullanılmıştır. Böylece her doğrultu boyunca 2-B ters çözümden elde edilen yer elektrik kesitleri birleştirilerek, öz direnç kat haritaları elde edilebilir (Şekil 10). Burada da yine 3-B bir görüntü elde edilmiştir. Bir öncekinden farkı, her bir kesit belli derinlik seviyelerindeki x-y düzlemini göstermesidir. Bu haritalarda da kazılan K1 ve K2 alanları çizilmiştir. Öz direnç kat haritalarında, G-K doğrultusu boyunca 20-28, D-B doğrultusunda 1.5-6.5 metreler arasında, 0.5-1.5 metre derinlikler arasında K1 ve K2 alanları içine düşen bir belirti görülmektedir. Kazı sonucunda gösterilen K1 ve K2 alanlarında, söylenen derinlikler arasında kerpiç bir duvar ile Bilge Kağan külliyesine ait olduğu düşünülen taban bulunmuştur (Şekil 11).



Şekil 2.5.(a) Her doğrultu boyunca ölçülmüş verilerin 2-B ters çözümü sonucu bulunan modeller (x-z kesitleri) (b) Bütün x-z kesitlerinde aynı derinlikteki blokların öz dirençleri kullanılarak çizilen öz direnç-kat haritaları, (c) Kazılan K1 ve K2 alanları (Candansayar ve diğ. 2007)