İST 417 Lineer Modeller – 1. Hafta

Y: gözlemlerin vektörü

X: tasarım matrisi

β: bilinmeyen parametrelerin vektörü

ε: rastgele hataların vektörü

olmak üzere, Y, X, β ve ε arasında

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

olarak ifade edilen bağıntıya lineer model denir.

<u>Not:</u> $\varepsilon \sim NID(0, \sigma^2 I)$ olduğu varsayılır, veya kısaca

$$\varepsilon \sim NID\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}\right]$$

olarak tanımlanır.

<u>Not:</u> Lineer modellerdeki "lineer" kelimesi, modelin β parametre vektörüne göre lineer olduğu anlamında kullanılmaktadır.

Bu derste yoğun olarak kullanılan matrisler ve genel özelliklerini detaylı olarak inceleyelim.

Matrisler ve Genel Özellikleri

- $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vektörlerinden en az biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazılamıyorsa bu vektörler lineer bağımsızdır denir. Lineer bağımsız olmayan vektörlere lineer bağımlı vektörler denir.

<u>Örnek:</u>

R^3 te $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

<u>Örnek:</u>

R^3 te $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörleri lineer bağımlıdır; çünkü $x_3 = 2x_1 - x_2$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- X matrisinin sütunlarının gerdiği (span) uzaya, X matrisinin sütun uzayı denir. Bir başka ifade ile sütun uzayı, X matrisinin sütunlarının lineer bileşimlerinin kümesi olarak ifade edilir.
- X matrisinin sütun uzayının boyutuna X matrisinin rankı denir ve rank(X) ile gösterilir.

Örnek:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, rank(X) = 3$$

Çünkü X matrisinin sütunları lineer bağımsızdır.

Örnek:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

X matrisinin sütunlarına sırasıyla x_1, x_2, x_3 ve x_4 denirse $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$ olarak ifade edilebildiğinden rank(X)=3 olduğu görülür.

- X, mxn boyutunda bir matris ve m≥n olmak üzere eğer rank(X)=n ise bir başka deyişle, X matrisinin rankı, sütun sayısına eşitse X matrisine tam ranklıdır denir.
- X, nxn boyutunda bir kare matris olmak üzere

$$XX^{-1} = X^{-1}X = I$$

olacak şekilde bir X^{-1} matrisi varsa X matrisine terslenebilir matris, X^{-1} matrisine de X matrisinin tersi denir.

- X nxn lik kare matrisi için aşağıdaki önermeler denktir.

i. X tam ranklıdır.

ii. X terslenebilirdir.

iii. det(X)≠0 dır.

- X mxn lik matrisi tam ranklı ise $X'X$ matrisi de tam ranklıdır, dolayısıyla

terslenebilirdir.

- X mxn boyutunda bir matris olmak üzere

$$XX^{-}X = X$$

eşitliğini sağlayan X^{-} matrisine X in genelleştirilmiş tersi denir.

- X nxn boyutunda bir kare matris olmak üzere

i. $X' = X$ ise X e simetrik matris denir.

ii. $X^2 = X$ ise X e idempotent matris denir.

iii. $X'X = XX' = I$ ise X e dik (ortogonal) matris denir.

- X nxn boyutundaki kare matrisinin köşegen elemanlarının toplamına X in izi denir ve tr(X) ile gösterilir.
- X nxn boyutunda simetrik ve idempotent bir matris ise rank(X)=tr(X)=n dir.
- A nxn boyutunda simetrik matris ve $Y \in R^n$ olmak üzere

$$Y'AY$$

ifadesine karesel form denir.

- X mxn boyutunda bir matris ise $X'X$ nxn boyutunda simetrik bir matristir.
- Vektör ve matrislerin türevleri alınırken

i. $q = x'\beta$ ise $\frac{\partial q}{\partial \beta} = x$ tir.

ii. $q = x'x$ ise $\frac{\partial q}{\partial \beta} = 2x$ tir.

iii. A simetrik bir matris olmak üzere, $q = x'Ax$ ise $\frac{\partial q}{\partial x} = 2Ax$ tir.

kuralları geçerlidir.