İST 417 Lineer Modeller – 2. Hafta

Matris ve Vektörler ile İlgili Bazı Özellikler

Matrisin veya vektörün transpozu:

Eğer

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanırsa, X vektörünün transpozu X' sembolü ile ifade edilir ve

$$X' = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

olarak gösterilir.

Eğer,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir matris ise X matrisinin transpozu

$$X' = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir.

Tanım: Eğer A matrisinin satır ve sütunlarının yerleri değiştirilirse elde edilen yeni matrise A matrisinin transpozu denir. Açıktır ki aynı tanım vektör transpozu için de geçerlidir.

İki vektörün ya da iki matrisin toplamı:

→İki vektörün toplamı:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ve \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad ise \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

→İki matrisin toplamı:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \quad ve \quad Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1} & \cdots & y_{pn} \end{bmatrix} \quad \text{ise}$$

$$X+Y=\begin{bmatrix} x_{11}+y_{11} & \cdots & x_{1n}+y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1}+y_{p1} & \cdots & x_{pn}+y_{pn} \end{bmatrix}$$

Bir matrisin veya vektörün sabit ile çarpımı:

a sabit bir sayı, X nx1 boyutunda bir vektör ve Y pxn boyutunda bir matris olmak üzere,

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{p1} & \cdots & y_{pn} \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanırsa,

$ax=\begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix},\ aY=\begin{bmatrix} ay_{11} & \cdots & ay_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ay_{p1} & \cdots & ay_{pn} \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

<u>**Not:**</u> aY=Ya dır.

İki vektör ya da matrisin çarpımı:

$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\ ve\ \ y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan vektörler olsun.

Bu durumda,

$$x'y=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$$

olarak elde edilir.

$X=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix}\ ve\ \ Y=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan iki matris olsun.

Bu durumda,

$$XY=\begin{bmatrix} x_{11}y_{11}+x_{12}y_{21}+\cdots+x_{1n}y_{n1} & \cdots & x_{11}y_{1p}+x_{12}y_{2p}+\cdots+x_{1n}y_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1}y_{11}+x_{p2}y_{21}+\cdots+x_{pn}y_{n1} & \cdots & x_{p1}y_{1p}+x_{p2}y_{2p}+\cdots+x_{pn}y_{np} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

<u>**Tanım:**</u> j, elemanları 1’lerden oluşan nx1 boyutunda bir vektör olmak üzere

$$j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad jj' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1 \dots 1] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = J_{nxn}$$

dir. Burada, J_{nxn} elemanları 1 lerden oluşan bir matris olarak ifade edilir.

__Örnek:__ $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{a1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{an} \end{bmatrix}$

$j'_{1xn} Y_{nxa} = [1\ 1 \dots 1] \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{a1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{an} \end{bmatrix}$

$= [\sum_{j=1}^{n} y_{1j} \quad \sum_{j=1}^{n} y_{2j} \ \dots \ \sum_{j=1}^{n} y_{aj}] = [y_{1.} \quad y_{2.} \ \dots \ y_{a.}]$

Matrislerin Parçalanması:

Bazı durumlarda matrisleri alt matrisler şeklinde parçalamak uygundur.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Bu alt matrislerin her biri kare ya da dikdörtgen matris olabilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Burada,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \ A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \ A_{22} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$