İST 417 Lineer Modeller – 3. Hafta

Denklem Sistemleri

1. $X_1 + X_2 = 1$

$X_1 - 2X_2 = 2$

Bu denklem sisteminin tek çözümü vardır ve $X_1 = {}^4/_3,\ X_2 = -{}^1/_3$ olarak bulunur.

Not: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi tam ranklı olduğundan tek çözüm vardır.

2. $X_1 + X_2 = 3$

Bu denklem sistemi için sonsuz tane çözüm bulunabilir. Bu çözümlerden bazıları

$X_1 = 3,\ X_2 = 0$

$X_1 = 0,\ X_2 = 3$

$X_1 = 1,\ X_2 = 2$

$X_1 = -1,\ X_2 = 4$

şeklindedir.

3. $X_1 + X_2 = 2$

$X_1 - 2X_2 = 3$

$X_1 + 5X_2 = 1$

Bu denklem sisteminin çözümü yoktur.

p bilinmeyenli n tane lineer denklem sistemi

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = c_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = c_2$

...

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = c_p$

Bu denklem sistemi matris formunda $A_{nxp}x_{px1} = c_{nx1}$ olarak yazılabilir.

<u>Örnek:</u>

$X_1 + X_2 = 2$

$X_1 - X_2 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2x2}x_{2x1} = c_{2x1}$

n=p ve A non-singular (tekil olmayan) ⇒ $x = A^{-1}c$ (Denklem sisteminin tek çözümü vardır).

n>p ise çözüm yoktur.

n<p ise sonsuz sayıda çözüm vardır.

Ax=c denklem sisteminin bir ya da birden fazla çözümü varsa ⇒ Tutarlıdır (consistent)

Ax=c denklem sisteminin çözümü yoksa ⇒ Tutarsızdır (inconsistent)

Teorem: Ax=c denklem sisteminin en az bir çözümü vardır ⇔ Rank(A)=Rank(A,c)

Örnek: Aşağıdaki denklem sistemini inceleyelim.

$$X_1 + 2X_2 = 5$$
$$X_1 - X_2 = 2$$
$$X_1 + X_2 = 4$$

Bu denklem sistemi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ olarak ifade edilir. Burada rank(A)=2 dir.

(A,c)= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ⇒ Rank(A,c)=2, çünkü 3sütun1+sütun2=sütun3

Rank(A)=Rank(A,c) eşitliği sağlandığından yukarıda verilen teoreme göre bu denklem sisteminin en az bir çözümü vardır.

Örnek:

(A,c)= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ⇒ Rank(A,c)=3.

Rank(A)≠Rank(A,c) olduğundan sistem tutarsızdır (sistemin çözümü yoktur).

Teorem: Ax=c denklem sistemi tutarlı ve A^{-}, A matrisinin herhangi bir genelleştirilmiş tersi ise denklem sisteminin çözümü x=A^{-}c dir.

Not: A^{-} nin farklı seçenekleri için Ax=c denklem sisteminin farklı çözümlerini elde ederiz.

Teorem: A kare matris ise

i. A tekil (singular) ⇒ $|A| = 0$ dır.

Örnek: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = 4 - 4 = 0;\ \ Rank(A) = 1$

ii. A tekil olmayan (non-singular) $\Rightarrow |A| \neq 0$ dır.

Örnek: $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 - 1 = 2 \neq 0;\ \ Rank(A) = 2$

iii. A tekil olmayan (non-singular) $\Rightarrow\ |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ dır.

Örnek: $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{2}\ \ ve\ \ \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

olduğundan koşul sağlanır.

<u>Teorem:</u>

$U = a'x = x'a$ ve $a' = \left(a_1, a_2, \dots, a_p\right)$ sabitlerden oluşan bir vektör ise

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial (a'x)}{\partial x} = \frac{\partial (x'a)}{\partial x} = a$$

<u>Örnek:</u>

$a' = [1\ \ 2],\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow a'x = x_1 + 2x_2$

$$\frac{\partial (a'x)}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial (a'x)}{\partial x_2} = 2 \quad \Rightarrow \frac{\partial (a'x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

<u>Teorem:</u>

$U = x'Ax$ ve A sabitlerden oluşan simetrik bir matris ise

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial (x'Ax)}{\partial x} = 2Ax$$

<u>Örnek:</u>

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise

$x'Ax = [x_1\ \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 + x_2\ \ \ x_1 + 3x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2$ dir.

Buradan,

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2$$

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x_2} = 2x_1 + 6x_2$$

olarak bulunur. Sonuç olarak,

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$$

ve

$2Ax = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}$ olduğu görülür.

<u>Örnek:</u>

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$AB, CB, rank(A), rank(B)$ ve $rank(C)$ yi bulunuz.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

rank(A)=2, rank(B)=2 ve rank(C)=2 olarak bulunur.